主　　编　张景中　黄楚芳
执行主编　李尚志

本册主编　张景中
编　　委　郑志明　于　劭　朱华伟

给同学们的话

世界上的一切，都在不停地变化.

古希腊哲学家**赫拉克利特**（Heraclitus，约公元前540—公元前480年）说：人不能两次踏入同一条河流. 因为河水在流动，第二次踏入的已经不是上次的河流了.

赫拉克利特用生动的比喻说明一切都在不断地变化. 但他没有把概念说清楚. 什么叫同一条河流？昨天的黄河和今天的黄河是一条河还是两条河？早上的你和晚上的你是一个人还是两个人？

当时有的哲学家走向另一个极端，认为事物实际上是静止不变的，变化和运动只是人的幻觉. 其中有个叫**芝诺**（Zeno，约公元前490—公元前425年）的诡辩家，为了论证运动是幻觉，还提出了飞矢不动的著名怪论.

飞快的箭怎么可能不动呢？芝诺的说法是：箭在每一瞬间都要占据确定的位置，所以每一瞬间都是静止的. 既然每一瞬间都是静止的，又怎么能够动呢？

数学讲究严谨，概念要清楚. 要探讨动还是不动，就要先讲好什么叫动，什么叫不动.

什么叫动？一个物体，时刻 t_1 在甲处，另一个时刻 t_2 在与甲不同的乙处，我们就说它在时刻 t_1 到 t_2 之间动了. 如果对于两个时刻之间的任意时刻 t 它都在甲处，就说它在这段时间内没有动. 这样把时间和物体的位置对应起来，问题就清楚了. 原来，动和不动是

涉及两个或更多时刻的位置的概念，只看一瞬间，动和不动都没有意义．怪论的漏洞，源于对运动没有严谨的表述．

从上面两个例子可见，古人已经感觉到了事物的运动变化和保持相对稳定性质之间的矛盾，但由于尚未找到合理地刻画运动和变化的方法，就不能实事求是地认识运动和变化，或者否定运动的可能性，或者否认变化中的事物是同一事物．

用函数来刻画和描述事物的变化，既能够反映事物运动变化的规律，又能够合理地说明事物的稳定性．

直到 17 世纪，数学中出现了变量与函数的概念，人们才掌握了精确地描述和刻画运动与变化的工具．

一部电影由许多画面组成．这些画面按一定顺序排列在长长的胶片上．对画面进行编号，就得到了从一部分自然数到画面的对应．

电影是由一串离散的画面组成的．实在的事物却是由连续改变着的状态组成的．这时，时刻代替了编号，状态代替了画面．号码是自然数，而时刻是实数．运动变化的事物，就可以用时刻到状态的对应来刻画．时刻可以用实数表示，事物在一个时刻的状态也可以用一组或一个实数来表示，于是，时刻到状态的对应就成了实数到实数的对应，也就是函数．

我们在初中课程里，已经学过正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数，对函数的概念和表示方法有了初步的了解，并知道了一些应用的实际例子．

温故知新，举一反三．在高中课程中，我们将通过更丰富的实例，进一步体会函数是描述变量间的依赖

关系的重要数学模型，同时学习用集合与对应的语言来刻画函数，使函数概念更为严谨，用更准确、更简洁的语言来表述数学的概念、方法和把实际问题提炼为数学模型的过程.

工欲善其事，必先利其器. 我们将学习一些更有趣和更有力的探索函数性质的方法. 根据函数的表达式，这些方法能有效地检验许多函数的变化趋势和图象的对称性质.

函数成千上万，从何学起呢?

多种多样的数学问题，归根结底都是靠加减乘除来解决的. 四则运算中发展出了幂运算，幂运算产生出了指数函数、对数函数和幂函数. 偏偏就是这几类函数，能够描述解释大量的自然现象和社会现象，能够帮我们解决许多重要的实际和理论问题. 很快，我们就要和这三位新朋友认识了.

为给同学们提供增长见识、开阔视野的空间，编者对有些教学内容作了一定的扩展（书中用仿宋体排的内容和加星号的问题，不作教学要求），如“数学文化”、“多知道一点”等，希望同学们喜欢.

学习数学的新阶段开始了. 不久你将看到，学过的代数、几何，包括各种运算，还有方程，将连成一片，奏出以函数为主旋律的乐章.

作　者

梁山泊千军万马，有名有姓的不过一百单八将. 而《水浒传》里着力刻画的，只有林冲、武松、鲁智深等十几个人. 这是文学家的方法，也是数学家的方法.

目录

第1章 集合与函数

1.1 集　合 / 2

1.1.1 集合的含义和表示 / 2

习题 1 / 5

1.1.2 集合的包含关系 / 6

习题 2 / 9

1.1.3 集合的交与并 / 10

习题 3 / 13

1.2 函数的概念和性质 / 16

1.2.1 对应、映射和函数 / 16

习题 4 / 19

阅读与思考 计算机编程语言中的函数 / 21

1.2.2 表示函数的方法 / 24

习题 5 / 28

数学实验 用计算机作函数图象和列函数表 / 29

1.2.3 从图象看函数的性质 / 32

习题 6 / 36

1.2.4 从解析式看函数的性质 / 38

习题 7 / 41

1.2.5 函数的定义域和值域 / 42

习题 8 / 45

1.2.6 分段函数 / 46

习题 9 / 49

1.2.7 二次函数的图象和性质——增减性和最值 / 50

习题 10 / 53

1.2.8 二次函数的图象和性质——对称

性 / 54
习题 11 / 58
数学实验 用计算机研究二次函数的图象 / 59
小结与复习 / 64
复习题一 / 69

第2章 指数函数、对数函数和幂函数

问题探索 射线在介质中的衰减 / 74
阅读与思考 放射性元素的衰变 / 76
2.1 指数函数 / 78
2.1.1 指数概念的推广 / 78
习题 1 / 83
2.1.2 指数函数的图象和性质 / 84
习题 2 / 87
阅读与思考 指数爆炸和指数衰减 / 88
2.2 对数函数 / 90
2.2.1 对数的概念和运算律 / 90
习题 3 / 95
2.2.2 换底公式 / 96
习题 4 / 100
阅读与思考 对数小史 / 102
2.2.3 对数函数的图象和性质 / 104
习题 5 / 107
2.3 幂函数 / 108
2.3.1 幂函数的概念 / 108
习题 6 / 111
2.3.2 幂函数的图象和性质 / 112
习题 7 / 114

2.4 函数与方程 / 116
2.4.1 方程的根与函数的零点 / 116
习题 8 / 119
2.4.2 计算函数零点的二分法 / 120
习题 9 / 121
数学实验 用二分法求方程的近似解 / 122
2.5 函数模型及其应用 / 126
2.5.1 几种函数增长快慢的比较 / 126
习题 10 / 130
2.5.2 形形色色的函数模型 / 132
习题 11 / 136
小结与复习 / 137
复习题二 / 144
数学文化 函数概念小史 / 152

[多知道一点] 用计算机给区域填色 / 8 表示函数的其他方法 / 31 用概念解决问题 / 99 负数有时也有有理指数幂 / 114

附 录 数学词汇中英文对照表 / 155

第1章

集合与函数

日落月出花果香，
物换星移看沧桑.
因果变化多联系，
安得良策破迷茫.
集合奠基说严谨，
映射函数叙苍黄.
看图列表论升降，
科海扬帆有锦囊.

一切事物都处在相互关联和不断变化的过程之中. 函数则是描述变量间依赖关系的重要数学模型. 用集合和对应的语言更严谨地表达函数概念，有助于进一步认识函数、理解函数和运用函数.

1.1 集 合

1.1.1 集合的含义和表示

一、什么是集合

集合的概念是最基本的数学概念．因为它太基本了，无法对它进行精确的定义，只能作直观的描述．

我们日常说话、讨论问题或思考问题，常常需要把一些对象放在一起考虑，并且给这些对象一个总的名称．

我们要保护的珍稀野生动物，指的是某一条中华鲟吗？是某一只穿山甲吗？都不是．是若干种动物放在一起所给的一个总的名称．

你能举出更多类似的例子吗？

在数学语言中，**把一些对象放在一起考虑时，就说这些事物组成了一个集合**(set)**，给这些对象的总的名称，就是这个集合的名字．这些对象中的每一个，都叫作这个集合的一个元素**(element)．我们约定，**同一集合中的元素是互不相同的．**

集合论的创始人、德国数学家康托，在1871年给集合的说明是："把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起，称为一个集合，这些事物的每一个称为该集合的一个元素．"

数学的表述和推理离不开符号．集合论的语言要为数学服务，也要用符号来表示．

集合论中最基本的符号是$\in$，读作"属于(belong to)"．

若 S 是一个集合，a 是 S 的一个元素，就说 a 属于 S，记作 $a\in S$.

反过来，若 a 不是 S 的元素，就说 a 不属于 S，记作 $a\notin S$.

二、集合的例子

有了记号$\in$，许多数学事实就可以用简单明确的符号来表达．

例如，设 $L(A, B)$ 表示直线 AB 上全体点组成的集合，"P 是直线 AB 上的一个点"这句话就可以简单地写成 $P\in L(A, B)$.

像 $L(A,B)$ 这种名字，你也可以发明创造．例如，以 A 为圆心、半径为 r 的圆上的所有点组成的集合，可以记作 $C(A,r)$.

自己引进的记号，使用时要说明．

数学里最常用到的集合是各种数的集合．数组成的集合，简称数

集．这些集合都有专用的名字，例如：

全体整数组成的集合叫整数集(set of integer)，记作 **Z**；

全体有理数组成的集合叫有理数集(set of rational number)，记作 **Q**；

全体实数组成的集合叫实数集(set of real number)，记作 **R**；

全体自然数组成的集合叫自然数集(set of natural number)，记作 **N**．在本教材中，约定 **0 是自然数**，即 $0\in\mathbf{N}$．

为了方便，还用 $\mathbf{R}_+$ 表示全体正实数组成的集合；类似地有 $\mathbf{R}_-$，$\mathbf{Z}_+$，$\mathbf{N}_+$，$\mathbf{Q}_-$，…

这些数学里通用的专有符号，留心记住它们，以后用的时候不一定再说明了．

让我们来练习使用 $\in$、$\notin$ 和这些专用的符号来代替自然语言：

“255 是正整数”用符号表示就是（　　　　）；

“2 的平方根不是有理数”用符号表示就是（　　　　）；

“3.141 6 是正有理数”用符号表示就是（　　　　）；

“-1 是整数”用符号表示就是（　　　　）；

“x 是负实数”用符号表示就是（　　　　）．

很多集合只在特定的问题中出现，不一定要取名字，需要取名字时，也可以临时取一个．例如：

一副扑克牌有 54 张，组成一个集合，这个集合不妨叫作 **PK**；

12 种生肖属相，组成一个集合，这个集合不妨叫作 **SX**．

元素个数有限的集合叫有限集(finite set)（或有穷集），**元素无限多的集合叫**无限集（infinite set）（或无穷集）．**没有元素的集合叫**空集(empty set)，**记作** $\varnothing$，空集应是有限集．一元二次方程 $x^2+1=0$ 的全体实根组成一个集合，它一个元素也没有，就是空集．

三、表示集合的方法

表示一个集合，就是把它有哪些元素交代清楚．

生活中常见的方法，是把集合中的元素一个一个地写出来．饭馆里的菜单，计算机里的“文件夹”，都是这样做的．这叫作列举法．

数学里用列举法表示集合，通用的格式是在一对大括弧里写出每个元素的名字，相邻的名字用逗号分隔．例如：小于 10 的正偶数组

成的集合，用列举法可以表示为$\{2,4,6,8\}$或$\{8,2,6,4\}$等.

无穷集一般不能用列举法表示．有穷集如果元素太多或叫不出名字来，例如池塘里所有鱼的集合，也不便于用列举法来表示．这就可以**把集合中元素共有的，也只有该集合中元素才有的属性描述出来，以确定这个集合**．这叫作**描述法**.

开会的时候，先一一介绍在主席台和前排就座的贵宾，用的是列举法．而主席致词时说“各位老师，各位同学”，用的就是描述法了.

在数学里更多的是用描述法来表示集合．通用的格式是在一个大括弧里写出集合中元素的共有属性．例如，上面提到的集合$\{2,4,6,8\}$，用描述法可以表示为{小于 10 的正偶数}.

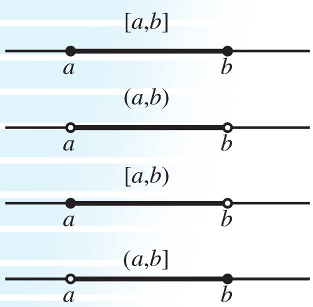
有些集合用一句话描述起来不方便，通常在大括弧里先写出其中的元素的一般属性或形式，再写个特定的符号（常用竖线、冒号或分号．本书中用竖线），然后在符号后面列出这些元素要满足的其他条件．例如：

若平面上所有的点组成集合 E，则平面上以 A 为圆心、半径为 5 的圆上所有点的集合，可以表示为$\{P\in E \mid PA=5\}$.

数学里最常用的一类集合叫**区间**(interval)．设 a，b 是两个实数，$a<b$，**所有大于 a 并且小于 b 的实数组成的集合叫作一个开区间**(open interval)，记作(a,b)．用符号表示就是：

$$(a,b)=\{x\in \mathbf{R} \mid a<x<b\}.$$

开区间的记号，可能和点的坐标的写法混淆，要根据上下文来确定它的具体意义.



类似地，**所有满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 组成的集合叫作一个闭区间**(closed interval)，记作$[a,b]$. 举一反三，还有**半开半闭区间**$(a,b]$**和半闭半开区间**$[a,b)$. **实数 a，b 都叫作上述区间的端点**，一个是左端点，一个是右端点.

实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为$(-\infty,+\infty)$，记号∞读作“无穷大”或“无穷”，$-\infty$和$+\infty$分别读作“负无穷大”或“负无穷”和“正无穷大”或“正无穷”．有了记号∞，我们就可以把满足条件 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 组成的集合用区间的形式分别表示为$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$.

类似地，集合$\{x\in\mathbf{R} \mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$可以简单地表示为$[-2,4]$，集合$\{x\in\mathbf{R} \mid -4<x<-2\}$可以简单地表示为$(-4,-2)$，等等.

习题 1

学而时习之

1. 用语言描述下列集合：

(1) $\{1,3,5,7,9\}$； (2) $\{x\in \mathbf{R}\mid 3x>2\}$； (3) $\{3,5,7,11,13,17,19\}$.

2. 用列举法表示下列各个集合：

(1) {不超过 30 的素数}； (2) {五边形 $ABCDE$ 的对角线}；

(3) {左右对称的大写英文字母}； (4) {60 的正约数}.

3. 用区间表示下列集合：

(1) $\{x\in \mathbf{R}\mid 3-x>5\}$； (2) $\{x\in \mathbf{R}\mid |3-x|<5\}$.

4. 用描述法写出下面这些区间的含义来：

$[-2, 7]$； $[a, b)$； $(123, +\infty)$； $(-\infty, -9]$；

$(u, v]$； $\left(\frac{2}{3}, 54\right)$； $(-\infty, 1)$； $[-5, +\infty)$.

要判断一个对象是否属于某个确定的集合，有时并不容易.

例如，我们常常用到“有理数集”和“无理数集”，这两个集合是确定的. 但要具体判断一个数是有理数还是无理数，并不见得容易. 数学家花了好大力气，才证明了圆周率 π 是无理数. 有些常数，至今还不知道它是有理数还是无理数.

温故而知新

5. 已知 E 为平面上所有点组成的集合并且 $A\in E, B\in E$，说明下列集合的几何意义：

(1) $\{P\in E\mid PA<5\}$； (2) $\{P\in E\mid PA=PB\}$.

6. 分别举出几个生活中用列举法、描述法表示集合的例子.

把一个集合里的元素弄清楚，常常比表示这个集合难得多. 例如，交通规则里清楚地说明了什么是违章驾驶，但要把违章驾驶的司机都找出来，可真是不容易.

1.1.2 集合的包含关系

一、“白马非马”的故事

战国末年的公孙龙，是我国古代的著名逻辑学家和哲学家.《白马论》是他的一篇著名的哲学论文.

这篇论文要证明的一个论题是:“白马非马”.他提出的理由之一是“求‘马’,‘黄’‘黑’马皆可致,求‘白马’,‘黄’‘黑’马不可致……是白马之非马,审矣!”意思是:若说要马，黄马黑马都行，若说要白马，黄马黑马就不行了. ……可见白马非马是无疑的了.

想一想，公孙龙话里的奥妙在哪里?

我们日常说话，用的是自然语言. 自然语言虽然生动通俗，但很难做到严谨. 因为常有一字多义的情形. “白马非马”的“非”字，乃“是”字的反义词. “是”字的用法有多种. 例如：

“关云长的坐骑是赤兔马.” 这里“是”字相当于数学中的等号，表示“关云长的坐骑”和“赤兔马”是同一个事物.

“赤兔马是红马.” 这里“是”字相当于我们上一节学的符号∈，表示“赤兔马”是“红马”集合的一个元素.

“红马是马.” 这里“马”是个大集合,“红马”是个小集合,“是”字表示的是两个集合之间的包含关系:红马集合包含于马集合.

“是”字既然身兼多职,可以表示“等于”、“属于”或“包含于”,“非”字也就可以表示“不等于”、“不属于”或“不包含于”了.

公孙龙所论证的，实际上是“白马集合不等于马集合”.

如果说“白马集合不等于马集合”，这大家都知道，并无新意.

含糊地说“白马非马”，通常会被理解成“白马集合不包含于马集合”，就引起讨论的兴趣了.

这个例子说明，使用集合的思想和一词一义的数学概念，有助于把事情弄清楚.

德国有一位哲学家黑格尔说：“你能吃樱桃和李子，但不能吃水果.”这句话和“白马非马”是不是有异曲同工之妙?

二、集合的子集和真子集

在数学中为了严谨，要避免一词多义，且表述问题时要尽量使用符号．我们已经有了等号“$=$”和属于记号“$\in$”，但还没有表示两个集合之间的包含关系的记号．下面就来引进这个记号：

如果集合 B 的每个元素都是集合 A 的元素，就说 B 包含于 A，或者说 A 包含 B．记作 $B\subseteq A$（或 $A\supseteq B$）．符号 $\subseteq$ 读作“**包含于**(lie in)”，符号 $\supseteq$ 读作“**包含**(contain)”．

若 B 不包含于 A，记作 $B\nsubseteq A$，符号 $\nsubseteq$ 读作“不包含于”．

上述定义用符号来表达，就是：若由 $x\in B$ 能推知 $x\in A$，就说 $B\subseteq A$．

若 B 包含于 A，则称 B 是 A 的一个子集(subset)．

因为集合 A 的每个元素都是集合 A 的元素，所以 A 也是 A 的子集．也就是说，每个集合都是它自己的子集．

我们规定空集合包含于任一集合，是任一集合的子集．

如果 B 是 A 的子集，A 也是 B 的子集，就说两个集合相等，记作 $A=B$．

如果 B 是 A 的子集，但 A 不是 B 的子集，就说 B 是 A 的真子集，记作 $B\subsetneqq A$，如图 1-1．

用示意图可以直观地表示一个集合和它的真子集之间的关系：大圈和小圈分别表示两个集合．小圈画在大圈里，表示前者是后者的真子集．

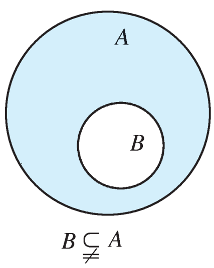


图 1-1

你能写出 **N**、**Z**、**Q**、**R** 这几个集合之间的包含关系吗？

区间 $[a, b]$、(a, b)、$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 这几个集合之间，哪个是哪个的真子集？

平面上的全体三角形、全体等腰三角形、全体正三角形和全体直角三角形分别组成 4 个集合，哪个是哪个的真子集？

设 $S=\{R, B, G\}$ 是计算机作图的 3 种基本色——红、蓝、绿组成的集合，S 一共有多少个子集？

“属于”是个基本概念，是用自然语言描述说明的．有了“属于”这个概念，就可以严谨地定义“包含于”、“子集”等概念了．

“集合 B 的每个元素也都是集合 A 的元素”这句话，换种说法就是“集合 B 中没有不属于集合 A 的元素”．对任一集合 A，空集中当然没有不属于集合 A 的元素，所以，空集包含于任一集合，是任一集合的子集．

三、全集和补集

下象棋的时候，看看棋盘上的局势，就知道被吃掉的有哪些棋子.

上课的时候，看看教室里的同学，就知道谁没有来.

如果在某个特定的场合，**要讨论的对象都是集合 I 的元素和子集，就可以约定把集合 I 叫作全集**(universe set)（或基本集).

若 A 是全集 I 的子集，I 中不属于 A 的元素组成的子集叫作 A 的**补集**(complementary set)（或余集). 记作 $\complement_I A$. 显然 $\complement_I A$ 的补集就是 A.

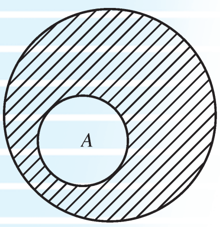
把实数集 $\mathbf{R}$ 看成全集时，能不能说 $\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}_-$ 互为补集呢？把平面上的全体直线组成的集合 L 看成是全集，其中直线 AB 的所有平行线组成集合 M，所有和 AB 相交的直线组成集合 N，能不能说 M 是 N 的补集呢？把全体三角形组成的集合看成是全集，设全体锐角三角形组成集合 V，V 的补集是由哪些三角形组成的呢？

你能举出更多的有关补集的例子吗？

文学家和数学家谈起美的问题. 文学家说，诗词歌赋中有许多巧夺天工的联句，例如"物华天宝，人杰地灵". 数学家说，数学里有很多自然形成的对偶，如加和减，正和负，乘和除，子集和它的补集. 它们处处呈现出对称的美.

前一个例子中，可以把一副象棋的32个棋子看成是全集. 棋盘上尚存的棋子组成的集合和被吃掉的棋子组成的集合互为补集. 后一个例子中，全体应当上这节课的同学之集可以算是全集，上课时出席的同学之集和缺席的同学之集互为补集.

在研究整数的性质时，可以把整数集 $\mathbf{Z}$ 看成全集，全体偶数之集和全体奇数之集互为补集.



大圆域表示全集，空白区域表示集合 A，则阴影区域就是 A 的补集.

补集的思想，在生活中和数学中都是很有用的. 把8点57分说成是9点差3分，重要的日子到来之前的"倒计时"，珠算加法口诀里的"3下5去2"、"9退1进1"，几何里常常要用到互补或互余的角，这些都含有补集的思想.

多知道一点

用计算机给区域填色

一般说来，由属于集合 A 而不属于集合 B 的元素组成的集合，叫作 A 和 B 的差集，记作 $A\setminus B$，读作 A 减 B. 补集是差集的特殊情形，$\complement_I A$ 也就是 $I\setminus A$.

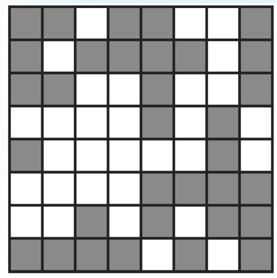
为了直观地理解集合的差，可以在计算机上做一做由两区域的差所得区域的填色：用"Z+Z 智能教育平台——超级画板"（以下简称"Z+Z 超级画板"）或具有类似功能的软件，在计算机屏幕上作两个相交的圆，顺次选择这两个圆，执行菜单命令"作图｜填充区域｜区域的交"，看看哪一部分填上了颜色. 再拖动两个圆，观察填色区域的变化.

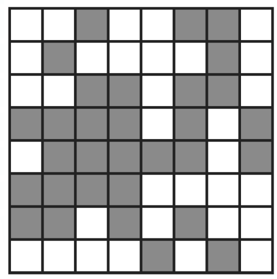
类似地，再作两个圆（或其他形状的区域），作出"区域的并"、

“区域的差”、“区域的与”、“区域的或”来，并进行观察.

两个区域组合可以产生出新的区域，两个集合呢？

棋盘上所有方格组成全集，染色的与没有染色的方格各组成一个子集，这两个子集互补吗？





练习

1. 设 Y 是由 6 的全体正约数组成的集合，写出 Y 的所有子集和真子集.
2. 把实数集 $\mathbf{R}$ 看成全集，有理数集的补集由哪些数组成？

习题 2

学而时习之

1. 设 $I=\mathbf{Z}$，$A=\{x \mid x=2k,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$. 求 $\complement_I A$，$\complement_I B$.
2. 已知 $A=\{x \mid x=2k+1, k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x=2k-1, k\in\mathbf{N}\}$，

   $C=\{x \mid x=2k-1, k\in\mathbf{Z}\}$，$D=\{x \mid x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$.

   写出集合 A，B，C，D 间的包含关系.
3. 把 $\mathbf{R}$ 看成全集，用区间形式写出下列各集合的补集：

   (1) $(2,+\infty]$；(2) $(-\infty,1)$；(3) $(1,+\infty)$.

温故而知新

4. 空集没有元素，但它有一个子集，就是它自己. 例如只有一个元素的集合{孙悟空}，它有两个子集：空集 $\varnothing$ 和{孙悟空}.

   两个或三个元素组成的集合各有多少个子集？你能找出一般规律吗？
5. 通过观察实物或查阅资料（上网、看书）或请教别人，了解黑白显示屏上的图象是如何用数字表示的. 这和集合、子集、补集等概念有何联系？

1.1.3 集合的交与并

一、两个集合的交

某电子技术服务公司在报纸上刊登广告招聘工作人员，对应聘人员的要求是：

* 高中或高中以上学历；
* 中英文打字达 80 字/min.

这里有两个条件．满足其中一个条件的人员组成一个集合，两个条件就确定了两个集合．该公司希望，应聘人员是这两个集合的共有元素．

在数学里，**把所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A，B 的交集**(intersection)，**记作 $A\cap B$**（读作"A 交 B"），也就是

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

如图 1-2，阴影部分表示两个集合的交集.

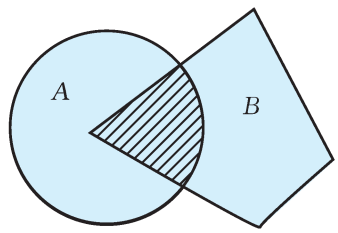


图 1-2

在数学里，常常用到交集.

例 1 设 $M=\{$直线 AB 上的点$\}$，$N=\{$直线 CD 上的点$\}$，若直线 AB，CD 交于点 P，则 $M\cap N=\{P\}$，若 $AB/\!/CD$，则 $M\cap N=\varnothing$.

例 2 设方程 $2x+3y=7$ 的全体解组成集合 U，方程 $3x-y=5$ 的全体解组成集合 V，则 $U\cap V$ 是两个方程联立而成的方程组的解，$U\cap V=\{(2,1)\}$.

这个事实用符号来表示就是：

若 $\quad U=\{(x,y)\mid 2x+3y=7\}$，$V=\{(x,y)\mid 3x-y=5\}$，

则 $\quad U\cap V=\{(x,y)\mid 2x+3y=7 \text{ 且 } 3x-y=5\}=\{(2,1)\}$.

例 3 设 P 表示所有菱形的集合，J 表示所有矩形的集合，如果 $S\in P\cap J$，S 是什么图形？

显然，S 既是菱形又是矩形，一定是正方形.

在一粒花生米上，能画很多曲线；在乒乓球的表面上，也能画很多曲线.

有没有一条花生米上的曲线，它和乒乓球上的某条曲线一模一样呢？

注意，$\{(2,1)\}$ 不是 $\{2,1\}$．方程组的解是数组 $(2，1)$，不是数 2 和数 1.

二、两个集合的并

实际生活中，可能碰到不同名称的东西放在一起或具有公共成员的两组东西放在一起计算的问题．例如：

两个阅览室共有多少种不同的报刊？

几个地区共有多少种不同的野生动物？

两本英语字典共收录了多少单词？

处理这些问题，要用一种新的加法：集合的并．

把集合 A，B 中的元素放在一起组成的集合，叫作 A 和 B 的并集（union），简称为并，记作 $A\cup B$（读作"A 并 B"）．

也就是说，集合 $A\cup B$ 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成．

如图 1-3 是两个集合的并集的示意图．

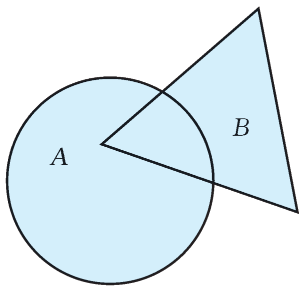


图 1-3

画个圆或多边形，它们边上和内部的点合在一起构成一个区域，一个区域表示一个集合．大区域套小区域，小的就是真子集．两个区域的公共部分也构成一个区域，恰好用来表示两个集合的交．两个区域合起来，当然就是两个集合的并了．这种用来表示集合关系和运算的图，叫维恩（Venn）图．

要注意的是，一个既属于 A 又属于 B 的元素，在 $A\cup B$ 中只算是一个元素，不能重复计算．例如：

{金，木，水，火}∪{水，木，火，土}={金，木，水，火，土}．

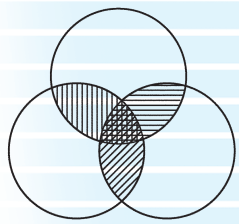
如果得出{金，木，水，火，水，木，火，土}就错了．

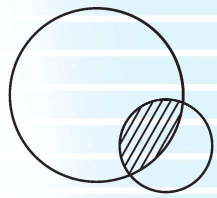
在数学里，常常碰到并集．

例 4 方程 $x^2-9=0$ 的解集为 $A=\{3,-3\}$，方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集为 $B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=\{3,-3,1,2\}$ 是方程 $(x^2-9)(x^2-3x+2)=0$ 的解集．一般说，两个右端为零的整式方程乘起来得到一个新的方程，新方程的解集是原来两个方程的解集的并．所以，对于右端为零的方程，如果能将其左端分解成几个因式的乘积，就能使求解的问题简化．这是数学里常常把方程化成一端为零的形式的原因．

怎样计算并集中元素的个数？

在计算 $A\cup B$ 的元素的个数时，可以先把两个集合的元素个数相加，再减去重复计算的元素的个数．





前面已经多次使用维恩图来说明集合的关系和运算了．你能够用维恩图来探索和表示集合的运算律吗？

同一集合中的元素是互不相同的！

三、集合与推理

前面讨论“白马非马”问题时，我们已经看到，集合与推理有关系.

“如果 x 是白马，则 x 是马”，这句话表明两个条件“x 是白马”和“x 是马”之间有一个推理关系：从“x 是白马”可以推知“x 是马”，可用符号表示为：

$$x\text{ 是白马}\Rightarrow x\text{ 是马}.$$

一般来说，**甲$\Rightarrow$乙，称甲是乙的充分条件**(sufficient condition)，**也称乙是甲的必要条件**(necessary condition). 这里，“x 是白马”是“x 是马”的充分条件，“x 是马”是“x 是白马”的必要条件.

从集合的观点来看，白马集合和马集合两个集合之间有包含关系：白马集合包含于马集合.

可见，集合之间的包含关系和它们的元素所满足的条件之间的推理关系有密切联系：**当 A 包含于 B 时，则 A 中元素所满足的条件$\Rightarrow$ B 中元素所满足的条件.** 也就是说，$x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分条件，$x\in B$ 是 $x\in A$ 的必要条件.

但是，“x 是马$\Rightarrow x$ 是白马”并不对. 也就是说，前者是后者的必要而不充分的条件，后者是前者的充分而不必要的条件.

必要条件，少了不行；充分条件，有它足够.

用集合的语言来说，叫作“白马集合是马集合的真子集”.

如果既有甲$\Rightarrow$乙，又有乙$\Rightarrow$甲，就说甲是乙的充分必要条件，简称充要条件(sufficient and necessary condition). 当然，**这时乙也是甲的充要条件.** 对应的两个集合互相包含，也就是相等.

例如，我们学过“平行四边形的对角线相互平分”，这表明，平行四边形集合是对角线相互平分的四边形集合的子集；反过来又知道，“对角线相互平分的四边形是平行四边形”，可见对角线相互平分的四边形集合也是平行四边形集合的子集，所以两个集合相等.

也就是说，“四边形是平行四边形”和“四边形的对角线相互平分”这两句话互为充要条件.

练习

1. 已知集合 $A=\{x\mid x-2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，求 $A\cap B, A\cup B$.
2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x-y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，求 $A\cap B$.
3. 已知集合 $A=\{x\mid |x-1|\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid |x+3|<1\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

习题 3

学而时习之

1. 说明下列各符号语言的含义：

(1) $a\in\{1,3,5,7,9\}$；　(2) $\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}$；

(3) $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；　(4) $[a,b]\cap[3,5]=\varnothing$；

(5) $c\in(0,1]$；　(6) $\{a,b,c\}\subsetneqq\mathbf{R}_+$.

2. 下列符号语言正确吗？为什么？

(1) $\{1\}\in\{1,3,5,7,9\}$；　(2) $[2,3)\in[1,5]$；

(3) $2\in[-2,3]$；　(4) $[-1,1]\subseteq(-\infty,+\infty)$.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{k\in\mathbf{Z}\mid 8<k<15\}$；　(2) $\{x\in\mathbf{R}\mid x^4-5x^2+4=0\}$；

(3) $\mathbf{N}\cap(1,6]$；　(4) $\mathbf{Z}\backslash((-\infty,-3]\cup(5,+\infty))$.

4. 已知 A，B 为非空集，且 $A\neq B$，用下列符号中的适当符号填空：$\subsetneqq$，$\subseteq$，$=$，$\supsetneqq$，$\supseteq$.

(1) $A\cap B$ ______ $A\cup B$；　(2) $A\cup \complement_I A$ ______ A；

(3) A ______ $A\cap B$；　(4) $\varnothing$ ______ $A\cap B$；

(5) $A\cap A$ ______ $A\cup A$；　(6) $A\cup\varnothing$ ______ A；

(7) $A\cap\varnothing$ ______ $A\cap\complement_I A$ ______ $\varnothing$；　(8) $A\cap B$ ______ A ______ $A\cup B$.

5. $[a,b]\cap[c,d]=$？按 a，b，c，d 的各种大小关系，有不同的回答.

下列的答案分别对应于什么条件？

（1）空集；　（2）$[a,d]$；　（3）$[c,b]$；　（4）$\{b\}$；　（5）$[a,b]$.

还有别的可能的答案吗？请找出所有可能的答案来.

6. 在什么条件下，有$[a,b]\cup[c,d]=[a,d]$？

7. 在 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 中任取两个，求它们的并集和交集.

8. 已知 $A=\{x\mid |x-a|<4\}$，$B=\{x\mid |x-2|>3\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

温故而知新

9. 我们知道，两个集合只要元素相同，就认为它们是相等的，从这个角度出发，你能不能回答下面的问题？

（1）用列举法分别写出下面的集合：

$$A=\{a\in\mathbf{Z}\mid -2<a<4\};$$

$$B=\{b\in\mathbf{Z}\mid -2<b<4\}.$$

（2）请你判断两集合 A 和 B 是否相等.

10. 如果集合 A 和 B 各有 12 个元素，它们的并集共有 20 个元素，那么，这两个集合有多少个共同的元素？

11. 市场调查公司为了解某市市民在阅读报纸方面的取向，抽样调查了 500 位市民，调查结果显示：订阅日报的有 334 人，订阅晚报的有 297 人，其中两种都订的有 150 人. 试问：

（1）只订日报不订晚报的有多少人？

（2）只订晚报不订日报的有多少人？

（3）至少订一种报纸的有多少人？

（4）有多少人不订报纸？

12. 为了开展社会实践活动，某班级组建了一支测绘队，需要 24 人参加测量，20 人参加计算，20 人参加绘图. 队员中有不少学生是多面手，有 8 人同时参加了测量和计算，有 6 人同时参加了测量和绘图，有 4 人同时参加了计算和绘图，还有几个人测量、绘图和计算都参加了. 试问，这个测绘队至少有多少人？

13. 某文化补习学校在学期末统计了参加补习的 198 位学生的成绩，统计结果表明，179 人语文及格，153 人数学及格，其中两门都及格的有 130 人.

（1）这个统计数字是否正确？请说明理由.

(2) 经查实，确有 7 人两门都不及格，而原来统计中语文和数学的及格人数是对的，那么，到底有多少人两门都及格？

上下而求索

钥匙的分配问题

某公司的重要资料存放在一个保险箱里，由 4 位董事负责保管. 该保险箱同时需要 n 把不同型号的钥匙才能打开. 公司规定，4 位董事中只要有 3 位到场就可以开保险箱，少于 3 位就不行. 按这种要求，n 至少是几？如何分配钥匙？

如果规定由 3 位董事负责保管，3 位董事中只要有 2 位到场就可以开保险箱，少于 2 位就不行，结果如何？

如果规定由 5 位董事负责保管，5 位董事中只要有 3 位到场就可以开保险箱，少于 3 位就不行，结果如何？

提示思考策略：设全部 n 把钥匙组成全集 U.

4 位董事掌握的钥匙分别组成 U 的子集 A，B，C，D，一定有 $A\cup B\subsetneqq U$.（为什么？）同理，$A\cup C$，$A\cup D$，$B\cup C$，$B\cup D$，$C\cup D$ 都是 U 的真子集，记 $Y(AB)=\complement_U(A\cup B)$，则 $Y(AB)\neq\varnothing$.（为什么？）

同理，$Y(AC)$，$Y(AD)$，$Y(BC)$，$Y(BD)$，$Y(CD)$ 都非空，一定有 $Y(AB)\cap Y(AC)=\varnothing$.（为什么？）

同理，这 6 个补集（$Y(AB)$，$Y(AC)$，$Y(AD)$，$Y(BC)$，$Y(BD)$，$Y(CD)$）中，任两个的交集都是空集.

所以至少有 6 把钥匙！

请继续考虑，如何分配钥匙.

进一步探讨更一般的情形.

丢钥匙可不是小事情.

据美联社、《泰晤士报》等多家媒体 2003 年 11 月 8 日报道，位于加利福尼亚州旧金山附近的美国国家实验室极为重要的 12 把关键钥匙“神秘失踪”. 这些钥匙可以打开该实验室最关键的一些办公室的门锁，因此实验室 526 幢建筑中的 10 万多把门锁都必须更换或者升级. 据粗略估算，这项浩大的换锁工程总共要花掉至少 170 万美元！

1.2 函数的概念和性质

1.2.1 对应、映射和函数

一、名字和映射

想一想，如果事物没有名字，世界将会怎样？

图书馆里，所有的书都没有名字了；

商店里，所有的商品都没有名字了；

地图上，所有的地方都没有名字了.

真是一片混乱，一场灾难！

名字如此重要，它的本质是什么？

所谓名字，不过是事物集合和声音符号集合之间的一种对应.

一般地，一件事物可能有几个名字，几件事物也可能有相同的名字. 一个人可以有小名，有笔名，有外号，有学名，是一人多名. 东北某个城市，有 100 多人都叫王秀英，是多人一名.

为了便于管理，政府有关部门规定，每人只能有一个法定的名字，就是户口本上的名字，身份证上的名字，银行存折上的名字. 尽管多人一名的情形可能存在，但每个人都有了唯一确定的正式的名字.

法定的名字，是居民集合到声音符号集合的一种确定的对应.

在数学里，**我们把这种集合到集合的确定性的对应说成是映射**(map 或 mapping).

映射的定义： 设 A，B 是两个非空的集合. 如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一元素和它对应，这样的对应叫作从集合 A 到集合 B 的映射，记作 f：$A \to B$.

在映射 f：$A \to B$ 中，集合 A 叫作映射的定义域，与 A 中元素 x 对应的 B 中的元素 y 叫 x 的**象**(image)，记作 $y=f(x)$，x 叫作 y 的**原象**(inverse image).

下面讨论一些例子.

生活中，课堂上，映射无处不在.
例如：
住户有门牌；
商店有招牌；
商品有商标；
国家有首都；
公民有身份证，学生有学生证；
中国人有生肖；
学习历史，每个事件都有对应的年份；
地理课上，每个省区有人口数；
化学里，元素的相对原子质量；
物理里，物质的密度；
……

也许你会说，可以编号，用号码代替名字. 但这样做，号码就是名字了. 还是要有名字. 若没有名字，做事、说话都很难.

一切知识都反映了客观事物的联系，映射正是描述事物联系的工具.

例 1 图 1-4（1）～（3）中所表示的集合 A 和集合 B 间的对应关系中，哪个是从集合 A 到集合 B 的映射，哪个不是？

解 （1）的对应法则是“开平方”，即对于集合 A 中的每一个非负数 x，除了 0 外，集合 B 中都对应着两个平方根，例如，和 A 中元素 1 相对应的 B 中元素有两个，1 和 -1，所以这不是从集合 A 到集合 B 的映射.

（2）的对应法则是“求算术根”，而每个非负实数 x 都有且只有一个算术根，因此这一对应是从集合 A 到集合 B 的映射.

（3）的对应法则是“求平方”，虽然集合 B 中的负数不对应于集合 A 中的任一个数，但集合 A 中的每个数都有且只有一个平方数，因此，这一对应是从集合 A 到集合 B 的映射.

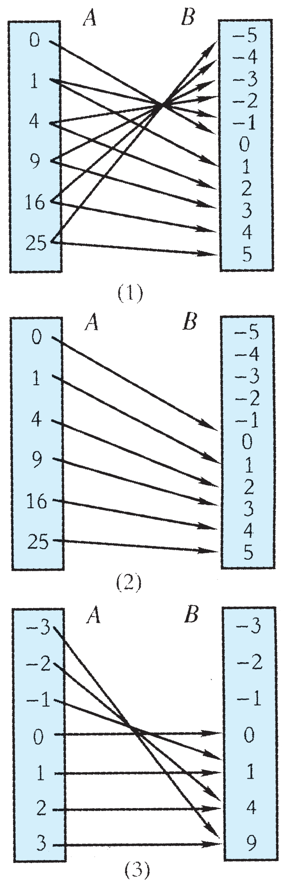


图 1-4

电视上常常有这样的知识竞赛题目：在两组事物之间连线来表示一种对应关系.

例如在一些国家名和城市名之间连线；在一些书名和作者名之间连线.

连线，就是在建立对应法则.

例 2 两个有理数 a，b 相加，得到 $a+b=c$. 这种运算可不可以看成一种映射？如果是，映射的定义域是什么集合？

解 设 A 是全体有理数对（a，b）组成的集合，即

$$A=\{(a,b)\mid a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{Q}\},$$

则对 A 中任意元素（a，b），按照对应法则 $a+b=c$，在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中有唯一确定的元素 c 和它对应，所以这是一个映射. 定义域是 A.

例 3 平面上确定了长度单位后，每个三角形都有个面积. 三角形和它的面积的对应，可不可以看成是三角形集合到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射？

解 可以，因为三角形的面积是唯一确定的.

例 4 如果用 c 表示摄氏温度值，f 表示华氏温度值，则它们之间的换算公式是 $f=1.8c+32$. c 到 f 的对应，是不是映射？若是，定义域是什么集合？

解 这种对应是确定的，是映射．由物理知识知道 $c>-273.15$，所以映射的定义域是 $(-273.15, +\infty)$．

例 5 根据波义耳定律，一定量的恒温气体，在压强的一定变化范围内，其体积和压强成反比．即 $V=\dfrac{b}{p}$，其中 b 是常数，V 是体积，p 是压强．则 p 和 V 的对应可以看作是映射．因为对不同的气体和温度波义耳定律成立的压强范围不同，压强太大时气体可能液化，所以定义域要根据具体情形的物理事实才能确定．

例 6 圆的半径 r 和面积 $S=\pi r^2$ 的对应，是 $\mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}_+$ 的映射．

是不是所有的函数都可以看成映射呢？后面就来讨论这个问题．

在例 4、例 5、例 6 三个例子中，所涉及的对应法则都是我们在初中数学课程中学过的函数关系：一次函数、反比例函数和二次函数．

练习

1．说明以下各个从集合 A 到集合 B 的对应中，哪些是从 A 到 B 的映射．

(1) $A=\{$三角形$\}$，$B=\{$正方形$\}$，对应法则是"面积相等"；

(2) $A=\{$正方形$\}$，$B=\{$三角形$\}$，对应法则是"面积相等"；

(3) $A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{Z}$，对应法则是"乘 2 减 1"；

(4) $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，对应法则是"取绝对值"；

(5) $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}_+$，对应法则是"取绝对值"；

(6) $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，对应法则是"取倒数"．

2．在第 1(3)题中，求原象(数)5的象，求象(数)5的原象；数 8 有没有原象？

在右边的题目中，我们把全等的三角形（或正方形）看成是一个三角形（或正方形）．

二、函数是一类特殊的映射

回顾一下初中数学课程中所学的函数概念：

如果在某个变化过程中有两个变量 x，y，对于每一个在一定范围内变化着的**自变量**(argument)x 的值，按照一定的对应法则，都有一个唯一确定的 y 值与之对应，那么，就说 y 是自变量 x 的函数，而自变量 x 的上述变化范围，就叫作该函数的**定义域**(domain)，和自

数码相机，数码电视，数码城市，数码世界．各种事物都可以用数来表示，所以映射也都可以表示为函数．

在不少数学和计算机科学书上，所说的函数其实就是映射．

变量 x 对应的 y 的值，叫作函数值，函数值的变化范围叫作该函数的**值域**(co-domain).

这里说的“在一定范围内”，就是在一个数集内；所谓“变化”，就是可以取不同的值，只是那时还没有引进集合概念，才这样直观地描述.

对照映射的定义，就能看出，**函数就是数集到数集的映射.** 把前面映射定义中的一般的集合限制为数集，映射换为函数，就得到了基于集合语言的函数定义：

函数的定义： 设 A，B 是两个非空的数集. 如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个数 x，在集合 B 中都有唯一的数 y 和它对应，这样的对应 f 叫作定义于 A 取值于 B 的**函数**(function)，记作 f：$A \to B$，或者

$$y=f(x)\ (x \in A,\ y \in B).$$

这里，A 叫作函数的定义域，与 $x \in A$ 对应的数 y 叫 x 的象，记作 $y=f(x)$，由所有 $x \in A$ 的象组成的集合叫作函数的值域.

有时“$x \in A$”可以省略不写，这时认为 A 是所有使 $f(x)$ 有意义的实数 x 组成的集合.

观察实际例子并对照定义看出，一个函数 $f(x)$ 有三个要素：

首先是**对应法则**，也就是如何从 x 确定 $f(x)$ 的法则. 不知道对应法则，就不能从根本上了解这个函数了.

其次是**定义域**，就是自变量 x 的取值范围. 对应法则形式上相同的两个函数，若定义域不同，就算不同的函数.

如果两个函数 f，g 的定义域是同一个数集 A，并且对任意的 $x \in A$ 都有 $f(x)=g(x)$，就说这两个函数相等，记作 $f=g$.

知道了对应法则和定义域，**值域**也就确定了. 对值域的了解表明对函数有了更深入的认识，所以值域也算是函数的要素之一.

习题 4

学而时习之

1. 已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，集合 A 到集合 B 的对应法则 f 是“乘 2 加

1”，集合 B 到集合 C 的对应法则 g 是“平方再减 2”.

（1）在下图中按对应法则写出集合 B，C 中的对应元素；

A	1	2	3	4	5
B	?	?	?	?	?
C	?	?	?	?	?

（2）写出 $f(2)$，$f(5)$；

（3）如果把从 A 到 C 的上述相应对应法则记作 h，写出 $h(2)$，$h(5)$.

2. 举出几个实际生活中映射的例子.

3. 从所学的各门课程中，找出一些映射的例子.

4. 生肖相同的人，年龄一定相同吗？生肖不同的人，年龄一定不同吗？

温故而知新

5. 设 f：$A \to B$ 是映射，$x \in A$，$y \in A$. 若 $f(x)=f(y)$，是否一定 $x=y$？若 $f(x) \neq f(y)$，是否一定 $x \neq y$？

6. 姓名到身份证号码的对应是不是映射？身份证号码到姓名的对应是不是映射？

7. 图 1-5 上画了 3 条曲线，它们分别是你学过的三类函数的图象，这三类函数分别是一次函数、反比例函数和二次函数.

你能指出粗线、细线和虚线分别是哪种函数吗？

你能写出这三类函数的一般表达式吗？

你能举出这些函数的实际例子吗？

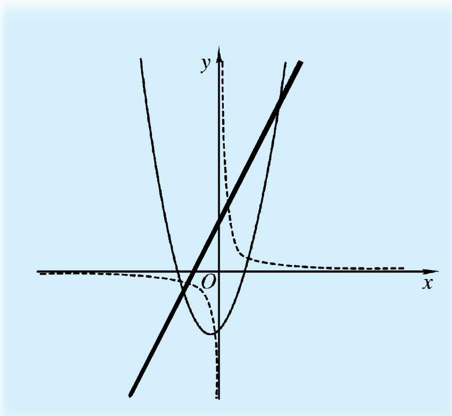


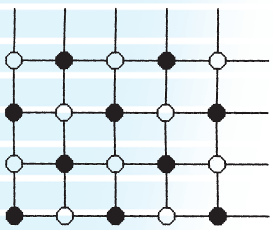
图 1-5

象棋盘上的马，从角上出发跳了 9 999 步，能回到出发点吗？

要是具体地试验这 9 999 步的各种跳法，100 年也不够.

有一个巧妙的方法来解决这个问题：把棋盘上的交叉点交替地染成黑色和白色，马走日字，一步只能由白到黑或由黑到白，跳两步不变色．跳奇数步一定变色，9 999 是奇数，从黑点出发跳 9 999 步只能到白点，当然回不到原处.

把点染成黑白两色，就是设计了一个从格子点集到两元素集{黑，白}的映射.



阅读与思考

计算机编程语言中的函数

如果在网上用“函数”作为关键词来搜索，可以搜出几千万含有词语“函数”的网页. 仔细看看，绝大多数说的好像不是我们所学的函数，而是计算机编程语言里的函数.

计算机编程语言中广泛使用的函数概念，是数学中函数概念的推广. 我们所学的函数 $y=f(x)$，它的作用是把数 x 对应于数 y，好像一个对数进行加工的机器，放进去的原料是数 x，出来的成品是数 y. 计算机编程语言里的函数，放进去的原料可以是一个或一组数，也可以是一个或一组文字符号，出来的成品可以是一个或一组数，也可以是一个或一组文字符号. 此外，计算机里的函数在对原料进行加工的过程中，还可能做一些确定的动作，让我们看看实际的例子.

打开“Z+Z 超级画板”中的程序工作区，把鼠标移到程序工作区并按 F1 键，工作区中会出现一个函数类别表. 用鼠标单击其中第二行“一般运算函数”前面的“+”号，便会出现一些函数的名字，鼠标指着其中某一个函数，旁边就会出现该函数的简单说明. 图 1-6 显示出两个函数的说明. 下边是超级画板中执行两个函数的情形.

在程序工作区执行这些函数，可以计算、画图、测量图形和表达式. 即使是尚未注册的软件，这些功能也是有效的.

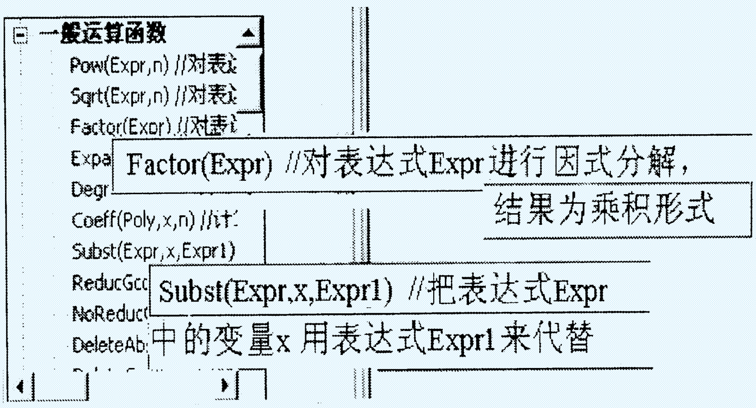


图 1-6

Factor(x^2−5*x+6);	**Subst(x+a,x,7);**
≫$(x-2)*(x-3)$#	≫$a+7$#
Factor(x^4−16);	**Subst(x+$y^{2,}y$,x+1);**
≫$(x-2)*(x^2+4)*(x+2)$#	≫x^2+3x+1#
Factor(x^6+a^6);	**Subst(x^3+a,x,y);**
≫$(x^2+a^2)*(x^4-a^2x^2+a^4)$#	≫y^3+a#

说明：在程序工作区键入“Factor(x^2−5*x+6);”，后按 Ctrl+Enter 键，在符号≫后返回$(x-2)*(x-3)$.

键入“Subst ($x+a$, x, 7);”，后按 Ctrl+Enter 键，在符号≫后返回 $a+7$.

在右边的主窗口中，显示出的运行情形如上.

计算机程序语言中的函数，自变量叫参数，函数值叫返回值.

计算机程序语言中的函数还可以画图. 例如在程序工作区中键入“Function($y=2*x/(1+x$^4), −3,3, 20);”，再按 Ctrl+Enter 键，便在主窗口画出了函数 $y=\frac{2x}{1+x^4}$在区间 (−3, 3) 上面的图象，这图象是对自变量的 20 个值计算出对应的函数值描点画出的.

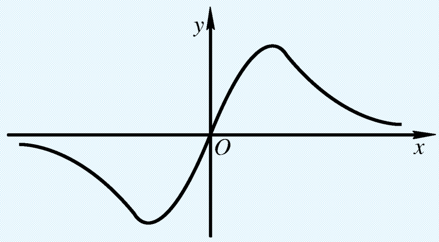


图 1-7

这表明 Function(s, a, b, k) 是一个画函数图象的函数，它有 4 个参数. s 是函数表达式，a，b 是图象区间的端点，k 是描点的数目.

计算机程序语言中也有我们所学的普通意义下的函数，可用来计算函数值. 你还可以用计算机程序语言来定义函数. 例如，在工作区键入“$f(x)${x^2+x−1;};”，再按 Ctrl+Enter 键，返回 $f(x)$，表示计算机已经遵照你的命令定义了一个函数 $f(x)=x^2+x-1$. 马上可以请它计算指定自变量的对应函数值；键入“$f(2)$;”，再按 Ctrl+Enter 键，返回 5，如下面所示：

f(x){x^2+x-1;}

≫f(x)#

f(2);

≫5#

f(0);

≫-1#

f(t);

≫t^2+t-1#

f(a+1);

≫$a^2+3*a+1$#

定义一个函数不一定就是在大括弧里键入代数式．例如，对于正整数 n，把从 1 到 n 的整数连乘起来，是数学中的一个常用运算，叫作 n 的阶乘．要用程序语言定义阶乘函数，可以在程序工作区键入

g(n){if (n==0) {1;} else {n*g(n-1);}}

再按 Ctrl+Enter 键，就定义了阶乘函数 $g(n)$．大括弧里的意思是：如果 $n=0$ 规定 $g(0)=1$，否则 $g(n)=n*g(n-1)$．

试试看计算机是否真的掌握了计算阶乘的方法：键入“g(0);”，按 Ctrl+Enter 键，返回 1；键入“g(3);”，按 Ctrl+Enter 键，返回 6；键入“g(5);”，按 Ctrl+Enter 键，返回 120；果然不错．

g(n)

{if (n==0) {1;}

else{n*g(n-1);}}

≫g(n)#

g(0);

≫1#

g(3);

≫6#

g(5);

≫120#

g(8);

≫40 320#

g(20);

≫2 432 902 008 176 640 000#

上述操作也可以用具有类似功能的软件或图形计算器进行．

1.2.2 表示函数的方法

数学研究的对象是抽象的．抽象的东西看不见摸不着，把它表示出来才好研究．所以数学讲究表示．

把一个函数的对应法则和定义域交待清楚的办法，就是表示函数的方法． 在初中数学课程中学过，可以用数学表达式、函数图象或函数表来表示函数．这是表示函数的三种主要方法，分别叫作**解析法**、**图象法**和**列表法**．

一、解析法

正方形面积 S 是边长 x 的函数，用公式 $S=x^2$（$x\in(0,+\infty)$）来表示，既说明了 S 是 x 的函数，又说明了如何从 x 出发求出对应的面积 S．

这种把常量和表示自变量的字母用一系列运算符号连接起来得到的式子，叫作解析式（还常常叫作解析表达式或函数关系式），解析法就是用解析式来表示函数的方法．

应用函数模型来解决实际问题时，常常希望写出函数的解析式来．

例 1 某农场的防洪大堤的横断面是上底为 $a=3$ m 的梯形，梯形的高 h 随地势在 1 m 到 5 m 间变化，下底 b 和高 h 之间有关系式 $b=a+4h$．为了估计修建大堤的土方量，需要把横断面面积表示为堤高的函数，试写出这个函数的解析式以及该函数的定义域，并求出堤高为1.5 m，2 m，3 m处大堤的横断面面积．

解 用 x 表示堤高，$y=S(x)$ 表示大堤的横断面面积，根据题意和梯形面积公式可得函数的解析表达式：

$$y=S(x)=\frac{h(a+b)}{2}=\frac{x(3+3+4x)}{2}$$

$$=x(3+2x)=2x^2+3x\quad(x\in[1,5]).$$

由此容易求出对应于堤高为 1.5 m，2 m，3 m 处大堤的横断面面积分别为 $S(1.5)=9\ \mathrm{m}^2$，$S(2)=14\ \mathrm{m}^2$，$S(3)=27\ \mathrm{m}^2$．

用解析式表示函数简捷明了，便于计算函数值和推导函数的性质，是最基本最常用的函数表示方法之一．只要可能，人们总是想用解析式来表示函数，哪怕是近似地来表示．

从解析式可以看到，例子中的函数是二次函数，它的图象是我们

所熟悉的，必要时用计算机也容易画出它的图象，列出函数表.

可见，只要找到了函数的解析式，求函数值、画图象、列表都能迎刃而解.

二、列表法

在一些还没有使用收款机的商店里，有些营业员为了工作的方便，对一些畅销商品，事先列好一张表备用. 例如某畅销商品每件价格为 1.45 元，而且人们每次购买一般不会超过 10 件，于是，可以列出下表：

数量（件）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
价格（元）	1.45	2.9	4.35	5.8	7.25	8.7	10.15	11.6	13.05	14.5

其实，这就是最简单的函数列表表示法，这里，自变量是商品的件数，而相应的销售价格就是商品件数的函数.

过去，为了航海和天文观测中的计算，编制了 10 位数学用表，表中有上千万的 10 位数字，是 5 000 万字的一部书. 估计一下，相当于多少本你现在用的数学课本？

例 2 某水库的存水量 Q 与水库最深处的水深 H 的关系如下表所示：

水深 H（m）	5	10	15	20	25	30	35
存水量 Q（$\times 10^4$ m^3）	20	40	90	160	275	437	650

从表中可以看到，每一深度 H 都对应唯一的一个存水量 Q，这个表就给出了 H 与 Q 间的对应关系，也就是函数关系.

用列表法表示函数关系，优点是具体易用，不懂数学运算的人也能查表做事，缺点是不够全面，例如，如果你还想知道该水库在水深为 22 m 时的存水量，那么你所能得到的只是“大约多少多少”了，因为，在表中你是查不出来的. 再者，从表上也很难看出函数的数学性质.

不过，因为列表法有着简单明白的优点，对一些特定的自变量值，相应的函数值可以直接从表上查到. 因此，人们也常将某些用解析式表示的函数编成表格，如平方表、平方根表、对数表、三角函数表等数学用表，都可以看作是用列表法表示函数.

有了计算机或计算器，数学用表用得少了. 但在一些部门，列表法还是常用的. 例如，银行里按不同存期的储蓄利率表，保险公司按不同年龄的寿险保费表，税务部门按不同收入的税额表，等等.

你能举出更多的例子吗？

三、图象法

根据解析表达式画图：

一次函数图象是直线.

二次函数图象是抛物线.

反比例函数图象是双曲线.

医院为了及时了解住院病人的病情，通常每隔一定时间要为病人测一次体温，护士在打好方格的特制纸上把每次测得的病人体温记成一串点，再把这些点用“线(线段或曲线)”连接起来，这就形成了每个病人的体温曲线. 医生则把这一曲线作为了解病情变化的重要参考.

自动测温仪则是根据上述原理，自动完成定时测温、描出曲线的工作.

例 3 设时间为 t 时，气温为 T(℃)，自动测温仪测得某地某日从 0 点到 24 点的温度曲线如图 1-8. 在图上，如果要知道某一时刻该地的温度，只要在 t 轴上找到表示时刻 t 的点，过该点作出 t 轴的垂线与气温曲线交于点(t,T)，便得到时刻 t 对应的一个温度 T. 这条气温曲线就给出了时间和气温间的对应规律.

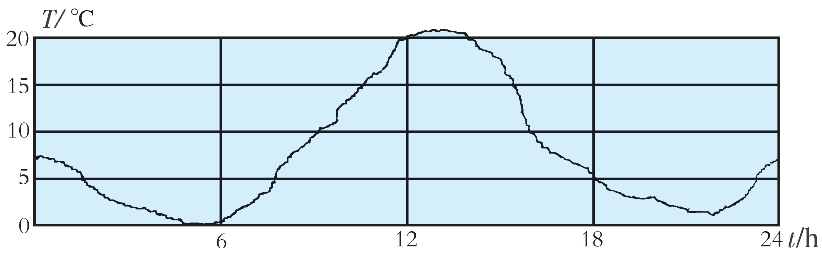


图 1-8

你能从图上看出下午 2—3 点当地的气温吗？能看出这 24 h 内何时气温最低吗？

为了直观地了解函数的性质，常要作出函数的草图或较为精确的图象. 作图过程通常有**列表、描点、连线**三个步骤：

列表——先找出一些（有代表性的）自变量值 x，并计算出与这些自变量相对应的函数值 $f(x)$，用表格的形式表示出来；

描点——从表中得到一系列的点（x，$f(x)$），在坐标平面上描出这些点；

连线——用光滑曲线把这些点按自变量由小到大的顺序连接起来.

要作出更精确的图象，常常需要描出更多的点.

例 4 作出函数 $y=\sqrt{x}$（$x\in[0，16]$）的图象.

解 选择容易计算的几个数值，列表如下：

x	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	16
y	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4

根据表中数据在直角坐标系中作点连线，得到图 1-9，你能根据图象估计出$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{11}$的近似值吗？

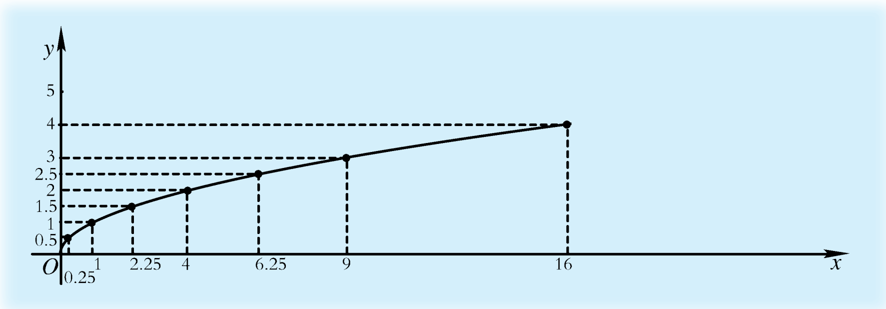


图 1-9

当然，在知道了函数较多的性质后，利用这些性质，可以描出较少的点并得到较正确的图象.

函数的三种表示方法，各有优点，也各有不足，在对具体问题的研究中常常将不同的方法结合起来.

在数学课程中，我们主要讨论的是解析法和图象法，并且经常把两种方法结合起来进行讨论.

练 习

1. 某县从 1949 年起到 1958 年的人口数如下：

   1949——304 813，1950——307 974，1951——322 359，1952——348 754，

   1953——357 854，1954——370 834，1955——376 114，1956——381 562，

   1957——382 491，1958——386 248.

   请你根据上述数据作出该县这 10 年的人口曲线图.

2. 利用例 2 中关于水库存水量的表作出由水深确定存水量的函数图象，再根据图象估计出水深为 7 m 和 18 m 时的存水量.

习题 5

学而时习之

1. 要印刷一批资料，需要确定页面的格式. 现在要求，页面上下各留4 cm空白，左右各留 3 cm 空白，中间排版部分要求面积为 432 cm^2. 写出纸张面积y(cm^2)和纸张排版部分宽度 x(cm) 间的函数关系式 $y=S(x)$和定义域，再计算出$S(8)$，$S(12)$，$S(24)$的值.
2. 要建造一座容积为 80 m^3 的无盖长方体形状的水池，如果水池深为2 m,底的一边长为 x m，已知水池底的造价为每平方米 a 元，池壁造价为每平方米 b 元，设水池总造价为 y 元，把 y 写成x 的函数，并指出该函数的定义域.
3. 举出社会生活中使用列表法表示函数的例子.
4. 举出报纸上、刊物上或互联网上的函数图象的例子.

温故而知新

5. 下面是平安长寿保险 20 年保费基数表（万元保额，女），可不可以看成是一个函数表？如果是，请指出函数的定义域和值域. 这样的表是否有必要用图象和解析式表示？

平安长寿保险 20 年保费基数表 （万元保额，女）

投保年龄	每年应交保费（元）	投保年龄	每年应交保费（元）	投保年龄	每年应交保费（元）	投保年龄	每年应交保费（元）
16	753	25	747	34	739	43	735
17	753	26	746	35	739	44	735
18	752	27	745	36	738	45	735
19	751	28	744	37	737	46	735
20	751	29	743	38	737	47	736
21	750	30	743	39	736	48	737
22	749	31	741	40	735	49	738
23	748	32	741	41	735	50	739
24	748	33	740	42	735		

数学实验

用计算机作函数图象和列函数表

使用“Z+Z 超级画板”或其他具有类似功能的软件，在计算机上作函数的图象既快捷又准确.

在右键菜单里单击“函数或参数方程曲线”，在出现的对话框里输入函数的表达式 $x\hat{}(1/2)$，变量范围取 0 到 10，点数取 101，单击“确定”，函数 $y=\sqrt{x}$ 图象就出现了.

图 1-10

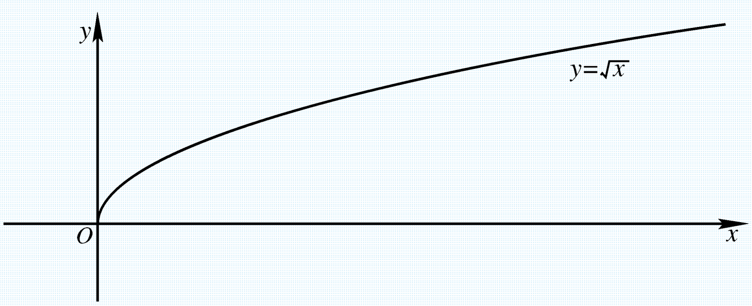


图 1-11

用鼠标在曲线附近单击左键，曲线变色，表示计算机知道你选择

若用的是超级画板的免费版本，可在程序区键入下列命令：

Function（x，$x\hat{}(1/2)$，x，0，10，101）；

光标放在分号“；”后面按 Ctrl+Enter 键即可作出函数曲线.

命令中的参数，前 2 项是 x 和 y 的表达式，第 3 项是自变量名，第 4～5 项是自变量范围，第 6 项是画图时样本点的个数.

了它.执行菜单命令“插入|表格”,屏幕上就出现了对应的函数表.

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x
0.0000	0.0000	0.9999	1.0000	2.0000	1.4142	3.0000	1.7320	4.0000	2.0000	5.0000	2.2360	6.0000	2.4494	7.0000
0.1000	0.3162	1.0999	1.0488	2.1000	1.4491	3.1000	1.7606	4.1000	2.0248	5.1000	2.2583	6.1000	2.4698	7.1000
0.2000	0.4472	1.2000	1.0954	2.2000	1.4832	3.2000	1.7888	4.2000	2.0493	5.2000	2.2803	6.2000	2.4899	7.2000
0.3000	0.5477	1.3000	1.1401	2.3000	1.5165	3.3000	1.8165	4.3000	2.0736	5.3000	2.3021	6.3000	2.5099	7.3000
0.4000	0.6324	1.4000	1.1832	2.4000	1.5491	3.4000	1.8439	4.4000	2.0976	5.4000	2.3237	6.4000	2.5298	7.4000
0.5000	0.7071	1.5000	1.2247	2.5000	1.5811	3.5000	1.8708	4.5000	2.1213	5.5000	2.3452	6.5000	2.5495	7.5000
0.6000	0.7745	1.6000	1.2649	2.6000	1.6124	3.6000	1.8973	4.6000	2.1447	5.6000	2.3664	6.6000	2.5690	7.6000
0.7000	0.8366	1.7000	1.3038	2.7000	1.6431	3.7000	1.9235	4.7000	2.1679	5.7000	2.3874	6.7000	2.5884	7.7000
0.7999	0.8944	1.8000	1.3416	2.8000	1.6733	3.8000	1.9493	4.8000	2.1908	5.8000	2.4083	6.8000	2.6076	7.8000
0.9000	0.9486	1.9000	1.3784	2.9000	1.7029	3.9000	1.9748	4.9000	2.2135	5.9000	2.4289	6.9000	2.6267	7.9000

图 1-12

若用的是超级画板的免费版本，可在程序区键入下列命令：

Crid(6,11,10,40,15,);

光标放在分号“;”后面，同时按 Ctrl 和 Enter 键即可得出函数表. 命令中的参数 6 是曲线的编号，可以在左边对象工作区查出；11 和 12 是表格的行列数目；40 和 15 是一个格子的长和宽，单位是屏幕像素.

这时表上的格子不够，可以用鼠标指着表格按右键，在右键菜单中单击“属性”，打开表格的属性设置对话框，在对话框下部把表格的行数改为 11，列数改为 20，单击“确定”即可.

用计算机画函数图象不但快速准确，还能让函数图象随参数变化，便于我们发现其中的规律.

例如，我们可以用它作为工具研究函数 $y=f(x)$ 的图象和函数 $y=f(x+a)$ 或 $y=f(x)+a$ 的图象之间的关系.

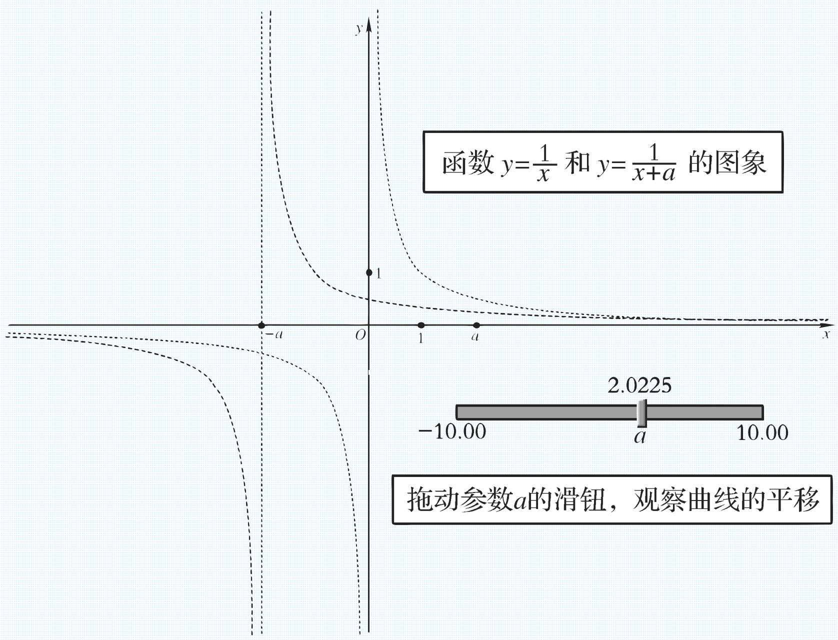


图 1-13

在图 1-10 的对话框中，输入函数表达式 $1/x$，画出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象，同样我们可以画出 $y=\dfrac{1}{x+a}$ 的图象. 容易看出，一个图象是另

一个图象在水平方向平移的结果.

怎样观察平移的远近和参数 a 的大小的关系呢？执行菜单命令"插入｜变量对象"，在打开的对话框里键入字母 a，单击"确定"，屏幕上会出现参数 a 的变量尺. 用鼠标拖动变量尺上的滑钮，可以看到 $y=\frac{1}{x+a}$ 的图象随 a 的变化而平移. a 变大，图象左移，a 变小，图象右移.

类似地，作出 $y=\frac{1}{x}+a$ 的图象，看它和 $y=\frac{1}{x}$ 的图象有什么关系.

有了这个工具，你还可以进一步研究 $y=f(x)$ 和 $y=f(-x)$ 以及 $y=-f(x)$ 的图象之间的关系. 当然，不要限于 $f(x)=\frac{1}{x}$ 这一个函数，还可以用一次函数、二次函数来试，找出一般的规律来.

以后学了新的函数，都可以这样试试看.

多知道一点

表示函数的其他方法

汽车司机要知道油箱里有多少油，用把带刻度的尺子放进去一量便知. 因为油量是油深的函数，这个函数关系体现在尺子刻度上，这叫表示函数的标尺法.

用计算器或计算机能求许多函数值，因为里面有计算函数的程序. 程序是根据算法编出来的，科技活动用到的大量函数，现在要用算法或程序来表示，而不是用列表法来表示.

函数也可以用描述法来表示. 例如，当 x 为有理数时让 $D(x)=1$，否则让 $D(x)=0$，就定义了函数 $D(x)$. 它叫作狄利克雷函数.

1.2.3 从图象看函数的性质

谈到一个人，可以用几句话简单地概括他的特征和状况．例如，是男是女？高矮？胖瘦？圆脸还是方脸？稳重还是活泼？青年还是老人？上学还是工作？

碰到一个函数，也常常从几个方面看看它的总的特征．了解了总的特征，更细致地研究它就会方便一些．

现实生活中，每天都在出现各种各样的函数图象，例如，气温变化的曲线，股票指数变化的曲线．给定一个函数的解析式，也可以通过列表、描点、连线的方法作出这个函数的图象，这就给我们提出了一个问题，如果给定一个函数的图象，你能不能从图象中读出这个函数的性质呢？

图象曲线千变万化，函数的性质，指的是什么呢？

图象尽管千变万化，但函数值毕竟是实数，实数变化，无非是变大变小．要问函数的性质，首先在大小上做文章．大，大到什么程度？上面封顶不封顶？小，小到什么程度，下面保底不保底？

函数值 y 是随着自变量 x 变化的．当 x 增加时，y 是一路走高呢，还是一路下滑呢？是先降后升，还是先升后降呢？

幼儿园里有看图识字，小学里有看图作文．现在要看图读出函数的性质．图里有丰富的信息，学数学不要忘记了图形．

概括来说，对函数性质的研究，我们首先关心的，是函数值的变化范围（封顶和保底）和变化趋势（走高和下滑）．图 1-14 是 2003 年 11 月份某报刊登的上海股票指数近一年的走势曲线图：

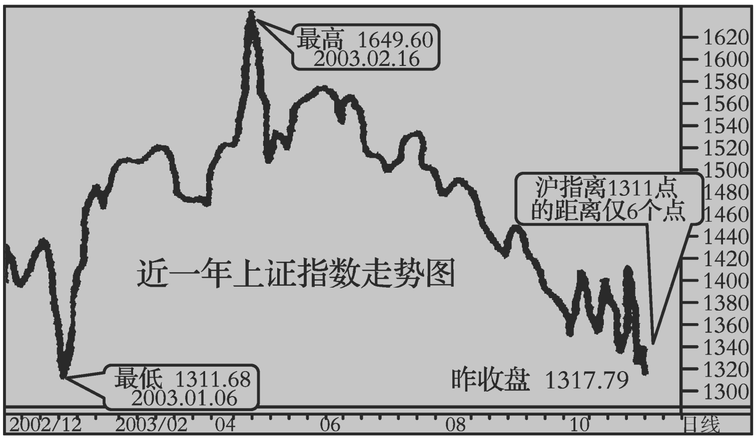


图 1-14

报纸上和网络上几乎天天有这种股票指数走势图，它的升降和成千上万投资人的利益密切相关．

从上图可以看到，自 2002 年 12 月以来，指数小幅振荡后下跌到最低点，后又振荡攀升到最高点，以后振荡下跌，几乎到最低点．所以，从图上看函数，范围和走势都能看出来．

但是，一幅股票指数走势图，在数学中没有多大的研究价值．因

为它所描述的数量关系没有确定的规律，100 年难得碰上一个同样的图象.

数学中更关心的，是那些能刻画明确的因果关系的函数. 这种函数会反复在实际问题和理论探讨中出现. 花工夫研究这种有大量应用的函数，才是一本万利的事.

我们学过的正比例函数、一次函数和反比例函数，是函数中最简单的几种. 下面让我们来看看这些函数图象的特征.

1. 正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图象是一条经过原点的直线.

它是一次函数的一个特殊类型，和其他一次函数的区别就在于图象是否经过原点.

正比例函数图象关于原点中心对称. 也就是说，绕原点旋转 180° 后和自己重合. 这样的函数被说成是奇函数(odd function).

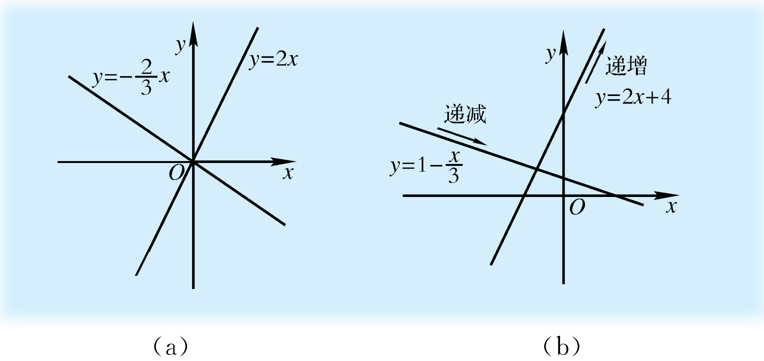


图 1-15

2. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象也是一条直线. 它的主要性质有：

(1) $k>0$ 时，函数值 y 随自变量 x 的增大而增大，这样的函数叫作单调递增函数；

$k<0$ 时，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，这样的函数叫作单调递减函数.

(2) 图象向上方和下方无限伸展，这样的函数叫作无上界也无下界的函数.

正比例函数当然也有上述性质.

单调递增、单调递减通常简称为递增或递减.

递增函数和递减函数统称为单调函数.

函数的单调性把自变量的变化方向和函数值的变化方向定性地联系起来，因此十分重要.

3. 反比例函数.

想一想：在匀速运动中，如果路程是固定不变的，那么走过这一段路程的时间和速度之间是什么关系？

反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$的图象是双曲线. 它的主要性质有：

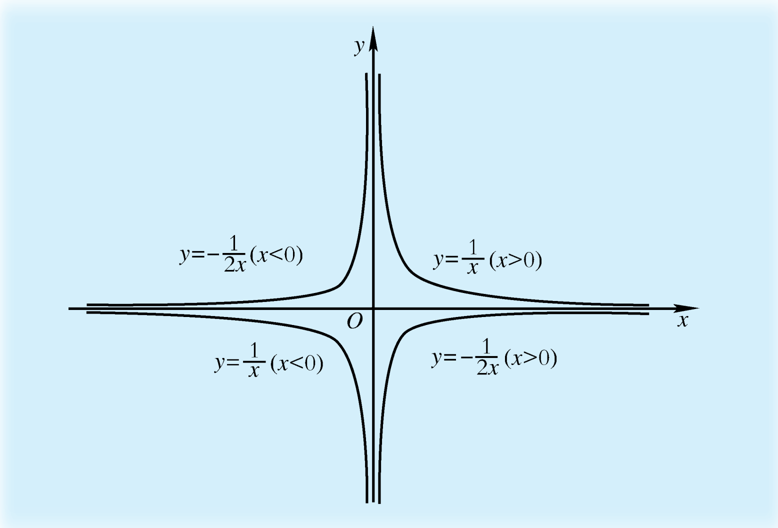


图 1-16

(1) $k>0$ 时，它在$(-\infty,0)$上递减，在$(0,+\infty)$上也递减；$k<0$ 时，它在$(-\infty,0)$上递增，在$(0,+\infty)$上也递增.

(2) 当 x 的绝对值增大时，图象越来越接近于 x 轴，但不会和 x 轴相交；当 x 的绝对值接近于 0 时，图象越来越接近于 y 轴，也不会和 y 轴相交.

(3) 反比例函数的图象关于原点成中心对称图形，它的对称中心是原点，所以它也是奇函数.

(4) 从图象容易“读”出，反比例函数既无上界，也无下界；和一次函数不同的是，它在有限区间上也可能无上界或无下界.

在日常生活中，经常会碰到常数函数的. 例如，如果你寄出的国内普通信件的重量不超过 20 g，那么你所应付出的邮资并不随信的重量的改变而变化，目前，总是 1.2 元. 又如，你到上海或北京乘坐地铁，在一定的距离内，地铁的票价是不变的，和你所经过的路程无关. 你能不能再举出一些常数函数的例子？

最简单的函数是常数函数 $y=c$，图象是平行或重合于 x 轴的直线，它是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

如果一个函数的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，这个函数被说成是**偶函数**(even function).

通过观察图象，初步认识到可以从以下几个方面来描述函数的基本性质：

（1）股票指数走势图中，标明了最高和最低指数，以及达到最高和最低指数的时间．前者分别叫作函数的**最大值**和**最小值**，后者分别叫作函数的最大值点和最小值点．**最大值和最小值统称为最值．**

（2）实际问题中的函数值，上下都是有界限的．**数学中研究的一般函数，可以“上不封顶，下不保底”，**分别叫作没有上界或没有下界．如果一个函数的最值求不出来或没有最值，它也可能有界．例如反比例函数 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上没有最小值，但是有下界．

（3）**函数的单调性把自变量的变化方向和函数值的变化方向联系起来了，描述了函数的变化过程和趋势，是函数的最重要的特征之一．**实际问题中出现的函数或数学中感兴趣的函数，多数可以把定义域分成几段，使它在每一段上是递增或递减的．

（4）有些函数的图象是以原点为中心的中心对称图形，这类函数是**奇函数**；有些函数的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，这类函数是**偶函数**．

函数的这些性质，可以概括为范围、趋势和对称性．我们在下面讨论有关函数的问题时，会反复涉及这些性质．

从图上观察函数的性质，难免有一些疑问：只靠眼睛观察得到的认识是不是准确呢？例如，从有界限的图怎能看出函数值是无界限的呢？曲线的对称性怎能看得那么精确呢？描点连线画图的可靠性如何保证呢？

发现疑点，提出疑问，是学习数学的好习惯，是创新思维的开始．

你能不能提出更多的问题呢？

要回答这些问题，必须把描述函数性质的自然语言严密化、精确化，提炼成数学语言，再联系函数的解析式作更深入的讨论．

练习

在同一坐标系中分别作出下列各组函数的图象：

（1）$y=3x$，$y=-3x$；　　（2）$y=\frac{3}{x}$，$y=-\frac{3}{x}$；

（3）$y=3x+1$，$y=-3x+1$；　　（4）$y=1$，$y=-1$．

习题 6

学而时习之

1. 图 1-17 是函数 $f(x)$ 的图象. 列出 $f(x)$ 的若干区间，说明它在各区间上的增减性，并指出该函数的最大、最小值点.

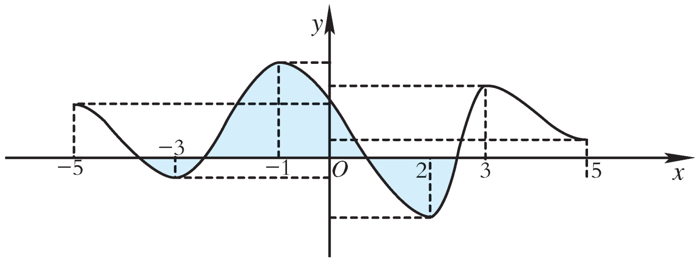


图 1-17

2. 根据图 1-18 的图象，简要说明近 150 年来人类消耗的能源结构变化情况，并对未来 100 年能源结构的变化趋势作出预测.

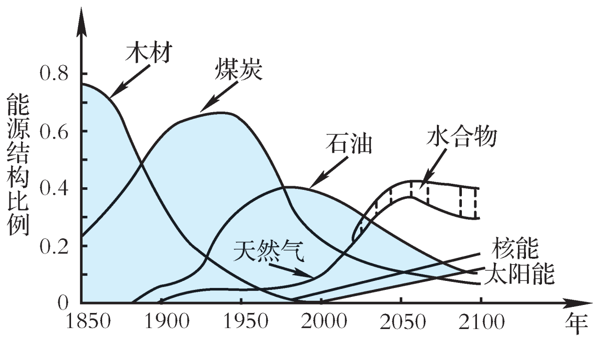


图 1-18

温故而知新

3. 先看一个练习：

把函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图象向右平移一个单位，求所得图象的函数解析式.

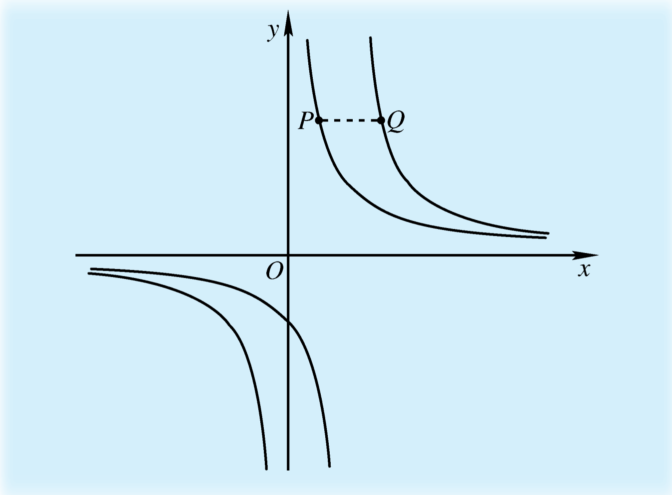


图 1-19

解 如图 1-19，在 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上任取一点 $P(x_1, y_1)$，再把点 P 向右平移一个单位，得到点 $Q(x, y)$. 容易看到，当点 P 沿 $y=\frac{1}{x}$ 的图象移动时，点 Q 也相应地“跟着”移动，点 Q 移动所得的图象实际上就是把 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移一单位后的图象.

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{x_1}, \\ x=x_1+1, \\ y=y_1. \end{cases}$$

消去 x_1，y_1 得：$y=\frac{1}{x-1}$. 也就是说，把函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象右移一个单位，所得图象的函数解析式是 $y=\frac{1}{x-1}$.

请你按照上述方法，回答下列问题：把 $y=\frac{1}{x}$ 的图象

(1) 向左平移 2 个单位；

(2) 向上平移 1 个单位；

(3) 向下平移 2 个单位.

这样所得的 3 个图象的函数解析式分别是什么？

这一方法叫作变换法. 请你仔细思考变换法的设想、过程，再回答下列问题：和函数 $y=f(x)$ 的图象

(4) 关于 x 轴对称的图象的函数解析式是什么？

(5) 关于 y 轴对称的图象的函数解析式是什么？

(6) 关于原点对称的图象的函数解析式是什么？

1.2.4 从解析式看函数的性质

有了函数表可以画图．有了函数解析式算出一系列函数值来，列表描点，也可以画图．

会画图看图，是不是研究函数性质的问题就解决了呢？

不完全如此．

第一，图画不精确．图上表示 3.14 还勉强，3.141 6 就难了．

第二，图上空间有限，定义域为 $(-\infty，+\infty)$ 的函数怎么画呢？

第三，描点连线，两点之间连哪种线呢？

通常，在描点连线时，两点之间用一段平滑曲线连起来就是了．

但是，实际的情形可能要复杂得多，这两点之间的曲线，可能会拐上几道弯．当然也许是平滑的．

多取些点不能从根本上解决问题，这里需要的是数学思维，是推理．

图 1-20 是计算机用描点连线的方法画出 $y=2\sin(x^2)/x$ 的两个图象．虚线是取 10 个点描出的，实线是取 50 个点描出的，两者不一样．

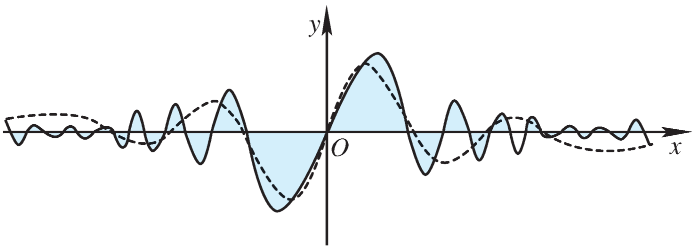


图 1-20

当然，多取些点会好一些．但是，不论取多少点，相邻两点之间的曲线是什么样子，总还不能确定．

可见，光靠描点作图看图来研究函数的性质还不够．从解析式出发研究函数性质，在数学推理的指导下画图，对函数的性质了解得会更全面、更准确，为此要用更严密的数学语言来描述函数的性质．

为了描述函数的性质，前面已经用了许多概念，如有界和无界，最大和最小，递增和递减等等，现在用数学的语言来定义这些概念．

以下设 D 是函数 $f(x)$ 的定义域，I 是 D 的一个非空的子集．如不加说明，我们认为 I 是个区间．

（1）**上界和下界：**如果有实数 B 使得 $f(x)\leqslant B$ 对一切 $x\in D$ 成立，称 B 是函数 f 的一个**上界**(upper bound)；如果有实数 A 使得

$f(x) \geqslant A$ 对一切 $x \in D$ 成立，称 A 是函数 f 的一个**下界**（lower bound）.

有上界又有下界的函数叫**有界函数**（bounded function），否则叫**无界函数**（unbounded function）.

想一想，有界函数的图象有什么特征？

（2）**函数的最大（小）值定义**：如果有 $a \in D$，使得不等式 $f(x) \leqslant f(a)$ 对一切 $x \in D$ 成立，就说 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取到最大值 $M=f(a)$，称 M 为 $f(x)$ 的**最大值**（maximum），a 为 $f(x)$ 的**最大值点**.

作为练习，请给出 $f(x)$ 的**最小值**（minimum）和最小值点的定义.

回顾前面的股票指数走势图，最大值是多少？最大值点在何处？最小值是多少？最小值点在何处？

（3）**函数的单调性定义**：如果对于 I 上任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 是区间 I 上的**递增函数**（increasing function），如图 1-21；如果对于 I 上任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 是区间 I 上的**递减函数**（decreasing function），如图 1-22.

想一想，最大值是不是上界？上界是不是最大值？

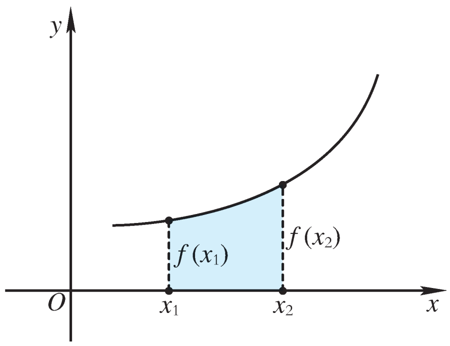


图 1-21

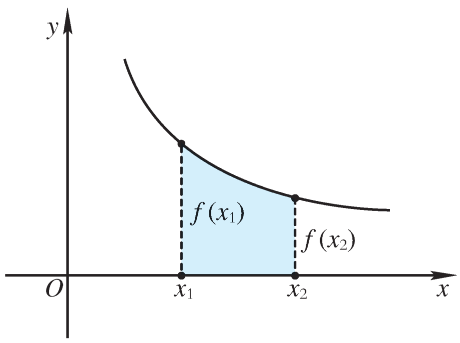


图 1-22

如果函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的递增函数或递减函数，就说 $f(x)$ 在 I 上**严格单调**（strictly monotone），区间 I 叫作 $f(x)$ 的**严格单调区间**.

在上述定义中，记 $x=x_1$，$x+h=x_2$，条件 $x_1<x_2$ 可以写成 $h>0$，$f(x_1)<f(x_2)$ 可以写成 $f(x+h)-f(x)>0$，$f(x_1)>f(x_2)$ 可以写成 $f(x+h)-f(x)<0$. 差式 $f(x+h)-f(x)$ 叫做函数在区间 I 上的**差分**（difference）. 如果不加说明，总认为 $h>0$. 这样，差分为正的函数就是递增函数，差分为负的函数就是递减函数.

想一想，在定义域 $[a, b]$ 上递减的函数 $f(x)$，最大值是多少？若 $f(x)$ 在 $[a, u]$ 上递减而在 $[u, b]$ 上递增，最小值是多少？

弄清楚函数的递增或递减的情形，有助于找到最大最小值. 而研

好的表达方式，会启发出好的想法，会引导出好的解决问题的方法.

用 x 和 $x+h$ 代替 x_1 和 x_2，强调了两者的联系，引出了差分的概念，自然地产生了检验函数增减性质的可操作的方法.

差分的方法，进一步发展成为更有力的处理函数的方法，即微分法. 那是后面的选修课的重要内容，也是高等数学的主题之一.

究函数增减性的有效方法，是检验其差分的正负.

例 1 函数 $f(x)=kx+b(k\neq 0, x\in[-1,+\infty))$ 是不是严格单调函数？有没有最大值和最小值？

解 检验 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上的差分的正负：

$$\begin{aligned}&f(x+h)-f(x)\\=&k(x+h)+b-(kx+b)\\=&kh.\end{aligned}$$

当 $k>0$ 时 $kh>0$，$f(x)$ 是 $[-1,+\infty)$ 上的递增函数，并且 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到最小值 $b-k$，又因为总有 $f(x)<f(x+h)$，故 $f(x)$ 不可能有最大值；当 $k<0$ 时 $kh<0$，$f(x)$ 是 $[-1,+\infty)$ 上的递减函数，并且 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到最大值 $b-k$，又因为总有 $f(x)>f(x+h)$，故 $f(x)$ 不可能有最小值.

例 2 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是递减函数.

证明 因为 $f(x+h)-f(x)=\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{h}{x(x+h)}<0$，

所以 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的递减函数.

例 3 证明函数 $g(x)=2x^2-3x+1(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right]$ 上递减，在区间 $\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$ 上递增.

证明 计算 $g(x)$ 的差分：

$$\begin{aligned}g(x+h)-g(x)&=2(x+h)^2-3(x+h)+1-(2x^2-3x+1)\\&=h(4x-3+2h).\end{aligned}$$

因为 $h>0$，所以只要讨论 $(4x-3+2h)$ 的正负.

(1) 当 x 和 $x+h$ 都属于 $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right]$，$x+h\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时，$4x+4h\leqslant 3$，

所以 $4x-3+2h\leqslant -2h<0$，可见 $g(x)$ 的差分在 $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right]$ 上为负，故它在 $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right]$ 上递减.

(2) 当 x 和 $x+h$ 都属于 $\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$，即 $x\geqslant\dfrac{3}{4}$，$4x-3\geqslant 0$，则差分

为正. 可见 $g(x)$在$\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$上递增.

想一想，在例 3 中 $g(x)$有最小值吗？如果有，在何处取到？

练 习

检验下列函数的增减性，并说明是否有最大(小)值. 如果有，指出最大(小)值和对应的最大(小)值点.

(1) $f(x)=-\frac{2}{x}(x\in(-\infty, 0))$；　(2) $f(x)=3-\frac{x}{2}(x\in[-6,1])$；

(3) $f(x)=x-x^2(x\in[-3, 0))$；　(4) $f(x)=\frac{x}{1+x}(x\in[0, 3])$.

习题 7

学而时习之

1. 设函数 $f(x)$的定义域为$(-4, 5)$，如果 $f(x)$在$(-4, 0)$上是递减函数，在$(0, 5)$上也是递减函数，能不能断定它在$(-4, 5)$上是递减函数？如果 $f(x)$在$(-4, 0]$上是递增函数，在$[0, 5)$上也是递增函数，能不能断定它在$(-4, 5)$上是递增函数？

2. 检验下列函数的增减性，并说明是否有最大最小值. 如果有，指出最大最小值和最大最小值点.

(1) $f(x)=3x-h(x\in[-2, 5])$；　(2) $g(x)=x^2-2x-5(x\in(-\infty,2])$；

(3) $k(x)=\frac{2}{1-x}(x\in[-5,0])$；　(4) $f(x)=-\frac{3}{x}(x\in(0, +\infty))$.

温故而知新

3. 老师给出一个函数，三个学生都正确地各指出了这个函数的一个性质：

甲：在 $(-\infty, 1]$ 上函数递减；乙：在 $[1, +\infty)$ 上函数递增；丙：$f(0)$ 不是这个函数的最小值.

请你写出一个这样的函数.

1.2.5 函数的定义域和值域

一、确定函数的定义域

画函数图象，首先要确定画在何处，也就是要知道图象的位置和范围．

求出了函数的定义域和值域，就知道了图象的位置和范围．

某地有一种蟋蟀，它在 1 min 里鸣叫的次数与气温有关，用 t 表示气温的摄氏度数，$J(t)$ 表示对应的鸣叫次数，它们的关系可以近似地用一次函数表示成

$$J(t)=7t-21.$$

按这个表达式来计算，2 ℃时蟋蟀每分钟鸣叫 -7 次，100 ℃时蟋蟀每分钟鸣叫 679 次．

这样的结论对不对呢？当然不对．

出现错误的原因，是上述函数关系式在 t 为 2 或 100 ℃时不成立．也就是说，2 和 100 不在函数 $J(t)$ 的定义域之内．

所以，**实际问题中的函数，它的自变量的值不但要使函数表达式有意义，还受到实际问题的限制，要符合实际情形．**

买水果，钱数是水果数量的函数，但是有的论斤，有的论个，这就是定义域的不同．

在数学里，常常把数学关系从实际问题中抽象出来研究．有时**只写出函数的表达式，略去函数的定义域，那么这个函数的定义域就是使函数的表达式有意义的自变量的变化范围．**

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$； (2) $y=1+\sqrt[3]{x}$； (3) $y=\dfrac{1}{2x^2-3x+2}$．

解 (1) 式子 $2x-4$ 既是被开(平)方式，又在分母上，作为被开（平）方式，要求式子非负，作为分母，要求式子不能为 0．综合起来，就是 $2x-4>0$，即 $x>2$．故该函数的定义域是 $(2,+\infty)$．也可以写成 $\{x \mid x>2\}$．

(2) 任何实数都可以开立方，因此，定义域为 $\mathbf{R}$．

(3) 这里，为使函数表达式有意义，只要求分母 $2x^2-3x+2\neq 0$，由于多项式 $2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$，所以，对任何实数，总有 $2x^2-3x+2\neq 0$，因此，该函数定义域为 $\mathbf{R}$．

这三个函数的图象见图 1-23．

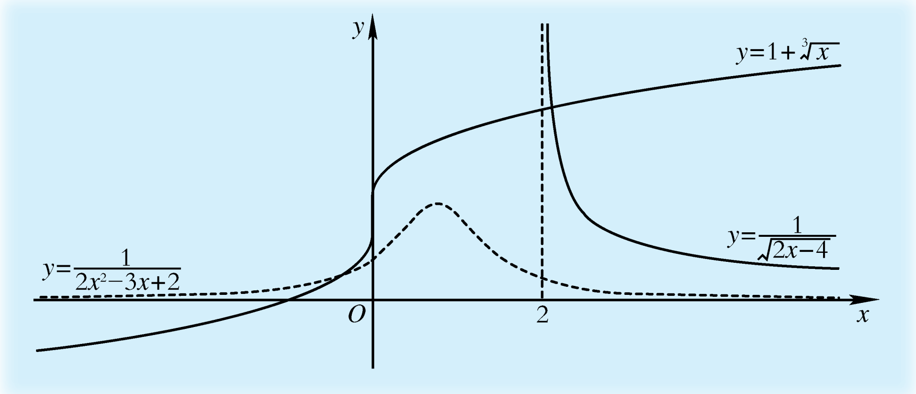


图 1-23

例 2 一种商品，成本每件 90 元，原定价为每件 100 元，平均日销售量为 50 件，经调查，如果该商品定价每提高或下降 1 元，销售量将相应地减少或增加 2 件．当销售价改变 x 元（提高为正值，降价为负值）时，把每日利润 y 元写成 x 的函数，并写出这一函数的定义域（这里规定 x 为整数）．

解 销售价为 $(100+x)$ 元时，每件利润为 $(10+x)$ 元，显然要有

$$10+x>0,\text{ 即 } x>-10.$$

这时日销售量为（$50-2x$）件，又有

$$50-2x>0,\text{ 即 } x<25.$$

因为每日利润应为每件利润乘以日销售量之积，故所求的函数为

$$y=(50-2x)(10+x)=-2x^2+30x+500 \quad (x\in \mathbf{Z}, -10<x<25).$$

因为 x 只取有限个值，所以很容易求出使利润最大的定价策略．

这两个不等式的意义是：既要赚钱，又要卖得出去．

二、求函数的值域

值域，是指函数值的集合．求值域的问题是一类综合性强、方法很多的问题．这里从熟悉的函数开始，介绍一些常见方法．

常数函数 $f(x)=c$ 的值域最简单，就是 $\{c\}$．一次函数 $y=ax+b$ 的值域是 $\mathbf{R}$，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的值域是 $\mathbf{R}\setminus\{0\}$．这些都是比较简单的情形．

从函数的图象上，也能直观地看出值域：把图象上的点向 y 轴上作投影，投影点集合对应的数集，就是函数的值域．

这种方法叫观察法．

例 3 已知函数 $y=\frac{3x+2}{2x-1}$，$y=10$ 是不是函数值？$y=\frac{3}{2}$ 是不是函数值？如何求该函数的值域？

这种由是否存在自变量相对应来确定函数值域的方法，叫作逆求法.

解 若要 $10=\frac{3x+2}{2x-1}$，得 $20x-10=3x+2$，$x=\frac{12}{17}$，即当自变量 $x=\frac{12}{17}$时，相应的函数值就是 10.

同理，若要$\frac{3}{2}=\frac{3x+2}{2x-1}$，得 $6x-3=6x+4$，方程无解，故$\frac{3}{2}$不是函数值.

一般地，若要 $y=\frac{3x+2}{2x-1}$，得 $2yx-y=3x+2$，即$(2y-3)x=y+2$.

只要 $2y-3\neq 0$，即 $y\neq\frac{3}{2}$，就有 $x=\frac{y+2}{2y-3}$，即相应于这一 x 值的函数值就是 y.

故该函数值域为$\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$，或写成 $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

例 4 求函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$的值域.

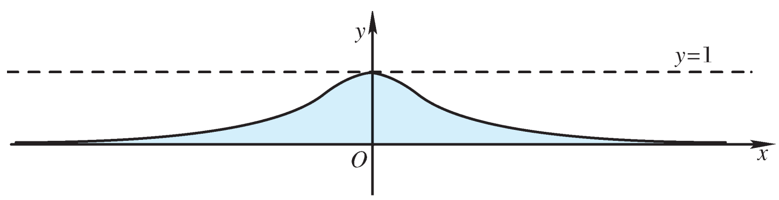


图 1-24

这一方法叫作不等式法.

解 由 $1+x^2\geqslant 1$，并且 $1+x^2$ 可以取到所有不小于 1 的实数，可得 $0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$，即$\frac{1}{1+x^2}$可以取到所有不大于 1 的正实数.

故该函数值域为 $(0,\ 1]$，见图 1-24.

练 习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{1}{x-2}$；　(2) $f(x)=\sqrt{2x+3}$；　(3) $g(x)=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+3x+2}$.

2. 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{3x+4}{x-2}$；　　(2) $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}$.

习题 8

学而时习之

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$；

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-1}$；

(3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-1}}$；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{3-\sqrt{3-x}}$；

(5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-1}$.

2. 求下列函数的值域：

(1) $f(x)=x^3$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；

(3) $f(x)=x+\sqrt{x-1}$；

(4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$；

(5) $f(x)=\dfrac{5x+3}{2x-3}$.

温故而知新

3. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与 $g(x)=x+2$；

(4) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$.

1.2.6 分段函数

事物的发展，在各个阶段会有不同的变化规律．用函数来表示时，对于自变量的不同范围可能用不同的解析式．

例 1 田径队的小刚同学，在教练指导下进行 3 000 m 跑的训练．训练计划的要求是：

1. 起跑后，匀加速，10 s 后达到 5 m/s，再匀速跑到 2 min；
2. 2 min 到 5 min 间匀减速到 4 m/s，再匀速跑 4 min 时间；
3. 在 1 min 内，匀加速到 5 m/s，保持匀速继续跑；
4. 最后 200 m，匀加速冲刺，使撞线时速度达到 8 m/s.

设小刚在跑步训练时做到了上述要求，请解决下面的问题：

（1）画出小刚长跑训练时，跑步速度关于时间的函数图象；

（2）写出小刚长跑训练时，跑步速度关于时间的函数表达式；

（3）计算这样跑完 3 000 m 所用的时间.

解 用 $v(t)$ 表示跑步速度 v 关于时间 t 的函数，t 从 0 s 开始计算，v 的单位是 m/s.

全过程可以分成几个阶段，每个阶段内 $v(t)$ 或者是常数，或者是一次函数，图象都是线段．只要把线段的端点都找出来就好了．顺次记这些端点为 A，B，C，D，…，根据条件列出函数表：

点	t	$v(t)$	坐标	说　明
A	0	0	$(0,0)$	开始匀加速
B	10	5	$(10,5)$	开始匀速
C	120	5	$(120,5)$	开始匀减速
D	300	4	$(300,4)$	开始匀速
E	540	4	$(540,4)$	开始匀加速
F	600	5	$(600,5)$	开始匀速
G	$600+x$	5	$(600+x,5)$	开始匀加速，$F\sim G$ 段时间 x 待定
H	$631+x$	8	$(631+x,8)$	终点．$G\sim H$ 段时间约 31 s
单位	s	m/s		

树木的横断面有年轮，数数年轮就知道树的年龄．这是因为一年中树木的生长不均匀，热天快，冷天慢，木质的疏密不同.

人的一生，身高增长的快慢也不均匀．小明 15 岁时身高 1.5 m，但到了 25 岁不见得是 2.5 m.

冲刺前匀速跑了一段条件中，没说跑多长时间．解决了这个隐含的问题，才能求出跑完全程的时间，才能确定函数的定义域.

在 200 m 内匀加速冲刺，速度由 5 m/s 上升到 8 m/s．这段的平均速度是 6.5 m/s，所用时间约为 31 s.

问题(3)的解答：把各段的时间和平均速度列表如下，$F \sim G$ 段的时间不知道就记作 x. 计算出各段的距离求和，得到方程 $2\ 815+5x=3\ 000$，解出 $x=37$，得出：跑完 3 000 m 所用的时间为 668 s.

	时间(s)	平均速度(m/s)	距离(m)
$A \sim B$	10	2.5	25
$B \sim C$	110	5	550
$C \sim D$	180	4.5	810
$D \sim E$	240	4	960
$E \sim F$	60	4.5	270
$F \sim G$	x	5	$5x$
$G \sim H$	31	6.5	200
求和	$631+x$	…	$2\ 815+5x$

问题(1)的解答：适当确定单位长，根据坐标作出 A 至 H 各点，顺次连接得到函数图象如下：

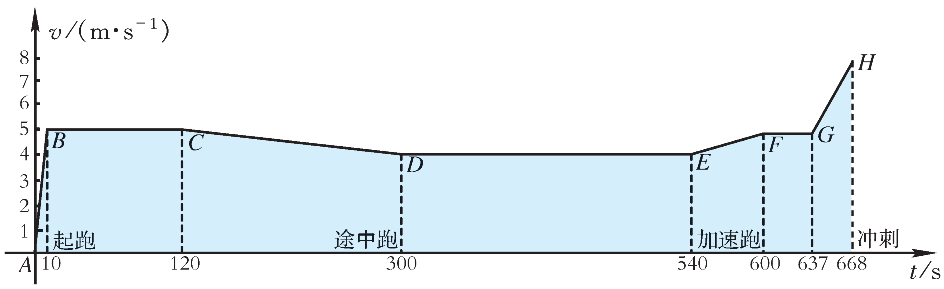


图 1-25

问题(2)的解答：函数 $v(t)$ 的表达式，在 $A \sim B$，$C \sim D$，$E \sim F$，$G \sim H$ 各段都是一次函数，在其余 3 段是常数，或者说是常数函数. 根据每段的初速、末速和时间计算的起点和终点，不难写出速度对时间的表达式.

$$v(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}, & t\in(0,10]; \\ 5, & t\in(10,120]; \\ -\dfrac{t}{180}+\dfrac{17}{3}, & t\in(120,300]; \\ 4, & t\in(300,540]; \\ \dfrac{t}{60}-5, & t\in(540,600]; \\ 5, & t\in(600,637]; \\ \dfrac{39t-22\ 843}{400}, & t\in(637,668]. \end{cases}$$

知道了 $v(t)$ 是一次函数，并且 $v(120)=5$，$v(300)=4$，如何写出 $v(t)$ 的解析式？

所谓分段函数，不是一个严格的数学概念，是为了方便说明问题和解决问题而应用的词语和思想方法．例如，在引进绝对值的时候，我们是分段定义的，就说它是分段函数．其实，也可以用一个解析式 $\sqrt{x^2}$ 来表示 x 的绝对值，还可以用 $\mathrm{sgn}(x)\cdot x$ 表示它．

分段函数虽然用了不止一个解析式来表达，但它是一个函数．

一次函数是最简单的函数，一段一段连起来，可以描述相当复杂的变化过程．

工业设计图纸中用到的许多复杂曲线，就是分段画出来的．通常每段都是三次函数或二次函数，叫作样条函数．对样条函数的研究，已经发展为一门学问了．

一般地，**如果自变量在定义域的不同取值范围内时，函数由不同的解析式给出，这种函数，叫作分段函数．**例 1 中的函数 $v(t)$ 就是一个分段函数．

变量 x 的绝对值 $|x|$，就是一个分段函数．

在数学里，常用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，如 $[4]=4$，$[4.1]=4$，$[-3.14]=-4$ 等，$[x]$ 叫作整数部分函数．对应地，$\{x\}=x-[x]$ 叫作小数部分函数，例如 $\{4\}=0$，$\{4.1\}=0.1$，$\{-3.14\}=0.86$ 等．还有一个符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$，当 $x>0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=1$；当 $x=0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=0$；当 $x<0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=-1$．这是几个最常用的分段函数．

要解决与分段函数有关的问题，通常要“分段”讨论，但要特别注意，最后要有一个统一的结论．

例 2　画出函数 $f(x)=|x-2|+|x+1|$ 的图象．

解　为了去掉绝对值符号，要分段讨论：

当 $x<-1$ 时，$f(x)=(2-x)+(-x-1)=1-2x$；

当 $x\in[-1,2]$ 时，$f(x)=2-x+x+1=3$；

当 $x>2$ 时，$f(x)=x-2+x+1=2x-1$．

分段画出 $f(x)$ 的图象如图 1-26．

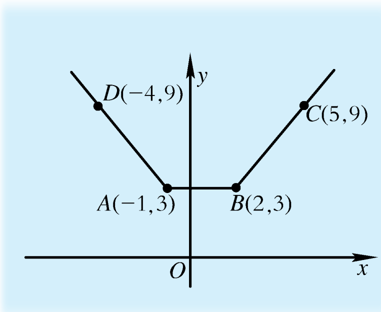


图 1-26

作出分段函数的图象，当然可以一段一段地按表达式画，这是基本方法．本例还可以有更简单的方法：在上面的讨论中，可以看到 $|x-2|$ 和 $|x+1|$ 不论在哪一段中，去掉绝对值符号后所得的都是一次函数，而一次函数的和（或差）是一次函数或常数函数，它们的图象都是直线，在分段上则是线段或射线，要作出线段或射线的图象，只要在每段上取两个点就够了．

为了简单，尽可能取段与段的分界点，即分段点．绝对值函数的分段点，就是绝对值符号中的量为 0 的点，所以 $f(x)$ 的分段点在 $x=-1$ 和 $x=2$ 之处．为了画出第一段和第三段的射线，再取 $x=-4$ 和 $x=5$．

这样，即使不去掉绝对值符号，也能画图．

练 习

作出下列函数的图象，并写出函数的值域：

(1) $y=|x+3|$；　　　　(2) $y=|x-2|-|x+2|$.

习题 9

学而时习之

1. 指出函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0; \\ 1, & x\leqslant -2 \end{cases}$ 的定义域和对应法则.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & x>1; \\ \sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1; \\ |x|, & x<-1. \end{cases}$ 求 $f(3)+f(-3)f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的值.

温故而知新

3. 某农场种植西红柿，由历年市场行情得知，从 2 月 1 日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系可用图 1-27 的一条折线表示，写出市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$.

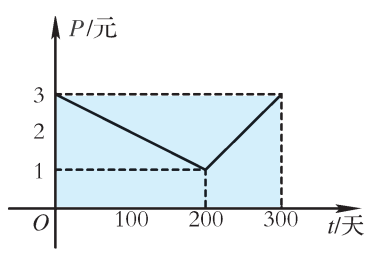


图 1-27

4.* 某城市出租汽车的起步价为 6 元，超过 3 km后每 500 m 增加 1 元，超过 10 km 的部分加 20%的返程费，即每 500 m 1.2 元. 不足 500 m 的按 500 m 计算. 使用整数部分函数，写出车费 F 关于路程 x 的函数 $F(x)$，并画出函数 $F(x)$的图象($x\in(0,20]$).

1.2.7 二次函数的图象和性质——增减性和最值

计算函数的差分，已不止一次．该总结点经验．

当函数是几项之和时，分项计算比较方便：

常数的差分是 0．

x 的差分是 h．

x^2 的差分是 $2xh+h^2$．

这样算，又快又少出错．

在 1.2.4 节，我们曾经用计算差分的方法，讨论过一些具体的二次函数的递增递减性质．

下面对一般形式的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq0$，$x\in\mathbf{R}$）作系统的研究．首先，计算出 $f(x)$的差分，检查其正负：

$$f(x+h)-f(x)=a(2xh+h^2)+bh=h(2ax+b+ah).$$

分两种情形考虑：

（1）$a>0$ 的情形：当 $2ax+b\geqslant0$ 时差分为正，为此要并且只要 $2ax\geqslant-b$，即 $x\geqslant-\dfrac{b}{2a}$，也就是 $x\in\left[-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$，

所以 $f(x)$在$\left[-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$上递增．

另一方面，$x<x+h\leqslant-\dfrac{b}{2a}$时，有 $2ax+2ah\leqslant-b$，即

$2ax+b+2ah\leqslant0$，也就是 $2ax+b+ah\leqslant-ah<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right]$上递减．

顺便得知，$f(x)$在 $x=-\dfrac{b}{2a}$处取到最小值 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=c-\dfrac{b^2}{4a}$，曲线开口向上．

想一想，在差分的表达式 $h(2ax+b+ah)$ 中，决定正负的部分是哪些？

因为 $h>0$，h 又可以任意小，所以 $2ax+b$ 的符号，有举足轻重的作用．

（2）$a<0$ 的情形：结论是 $f(x)$在$\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right]$上递增，在$\left[-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$上递减，$f(x)$在 $x=-\dfrac{b}{2a}$处取到最大值 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=c-\dfrac{b^2}{4a}$，曲线开口向下．

作为练习，请你推导 $a<0$ 情形下的上述结论．

注意到二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$，上述 $f(x)$的最大最小值 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$可以简单地表示成$-\dfrac{\Delta}{4a}$．

综合上述讨论，得到

定理 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0,x\in\mathbf{R})$，当 $a>0(a<0)$时，在区间$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$上递减（递增），在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上递增（递减），图象曲线开口向上（下），在 $x=-\frac{b}{2a}$处取到最小（大）值 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$，这里 $\Delta=b^2-4ac$.

记得吗？点$\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$叫作二次函数图象的顶点.

知道了二次函数的增减趋势和最值，就不难画出它的大致图象.

想要画得更准确，还应该知道函数图象和坐标轴的公共点.

取 $x=0$，得 $f(0)=c$，所以图象和 y 轴的交点是 $(0,c)$.

至于图象和 x 轴的公共点，请你根据顶点的位置和开口的方向来讨论. 例如，$a>0$ 时，开口向上，顶点在 x 轴上方时，图象就不会和 x 轴有公共点了. 但是，“顶点在 x 轴上方”是什么意思呢？

在下一节里，再作全面的讨论.

也可以从解析式出发来讨论. 要求图象和 x 轴的公共点，可以取 $y=0$ 反求 x，就成了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求解问题了.

例 1 作出下列二次函数的图象：

(1) $y=2x^2+4x-6$；

(2) $y=-x^2+x-1$.

解 (1) $a>0$，开口向上，顶点坐标是 $(-1,-8)$. 图象交 y 轴于点 $(0,-6)$，交 x 轴于两点 $(-3,0)$ 和 $(1,0)$.

(2) $a<0$，开口向下，顶点坐标是$\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$. 顶点在 x 轴下方，图象与 x 轴无公共点.

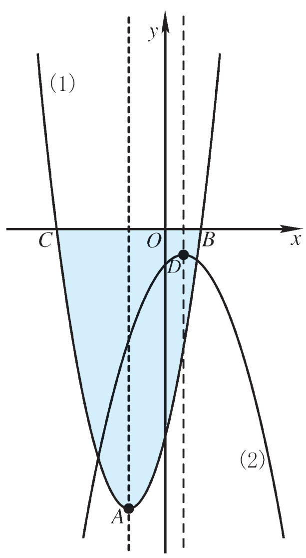


图 1-28

两函数的图象见图 1-28.

对于区间上的二次函数的最值，则要具体分析，不要机械套用公式.

例 2 如图 1-29，边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$. 在 CD 边上任取一点 E，过 E 作 $EF\perp BC$，垂足为 F，可得到$\triangle AEF$.

设△AEF 的面积为 S，当 E 在什么位置时，S 有最大值？最大值是多少？

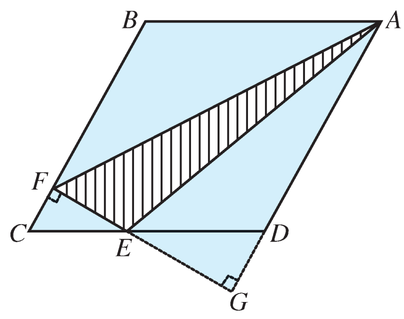


图 1-29

分析 为了确定点 E 的位置，设 $CE=x$，延长 FE 交 AD 延长线于 G，由 $EF\perp BC$，$AD/\!/BC$，得 $EG\perp AD$. 故三角形的底为 EF，高为 $AG=AD+DG$.

解 设 $CE=x$，则 $DE=2-x$；由 $\angle BAD=60^\circ$ 得 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

$DG=\frac{DE}{2}=1-\frac{x}{2}$，$AG=3-\frac{x}{2}$，所以

$$S=\frac{EF\cdot AG}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}x(6-x)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}(-x^2+6x),\ (x\in(0,2]).$$

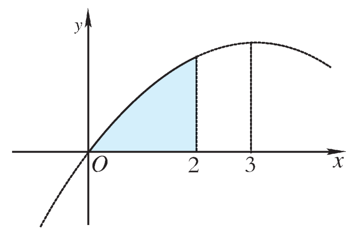


图 1-30

二次函数 $y=-x^2+6x$ 在 $x=3$ 处取到最大，在（$-\infty$，3）内递增，所以面积函数 $S=\frac{\sqrt{3}}{8}(-x^2+6x)$在$(0,2]$上递增，在 $x=2$ 时取到最大值，最大值为$\sqrt{3}$，如图 1-30.

常见错误.

注意到，E 在边 CD 上，有 $0<x\leqslant 2$，因此，说当 $x=3$ 时 S 有最大值是错误的.

有时，要把实际问题中的变量略加变换，化为二次函数来处理.

例 3 某厂准备投资 100 万元生产 A，B 两种新产品，据测算，投产后的年收益，A 产品是总投入的 1/5，B 产品则是总投入开平方后的 2 倍. 问应该怎样分配投入数，才能使两种产品的年总收益最大？

想一想：为什么要假设投入 B 产品为 w 万元，如设“投入 A 产品为 w 万元”，和这里的假设相比，哪个更方便？

解 设投入 B 产品为 w 万元，那么投入 A 产品应为$(100-w)$万元，设投入后年总收益为 y 万元，由题设，有 $y=\frac{1}{5}(100-w)+2\sqrt{w}$，为了避免根式，设 $w=x^2$ （$x\geqslant 0$），则

$$y=\frac{1}{5}(100-x^2)+2x$$

$$=-\frac{1}{5}x^2+2x+20,\ (x\in[0,10)).$$

此函数 $a=-\frac{1}{5}<0$，开口向下，$x=-\frac{b}{2a}=5$ 时取到最大值 25，对应的 $w=5^2=25$.

由此可知，当投入 A 产品 75 万元，投入 B 产品 25 万元时，有年最高总收益为 25 万元.

练 习

1. 写出下列二次函数的开口方向，顶点坐标，并作出草图.

 (1) $y=3x^2-2$； (2) $y=-(x-3)^2$.

2. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2x^2-4x+m}$，当 m 在什么范围内变化时，函数定义域为 $\mathbf{R}$？

习题 10

学而时习之

1. 写出下列二次函数的开口方向，顶点坐标，并作出草图.

 (1) $y=1-(x-3)^2$； (2) $y=x^2+6x+7$.

2. 写出二次函数 $y=x^2-6x+7$ 在区间$[-1,5]$上的最大值和最小值.

温故而知新

3. 本节例 3 中引出了函数 $f(w)=\frac{1}{5}(100-w)+2\sqrt{w}(w\in[0,100))$，不用变换，用计算 $f(w)$的差分的方法讨论其增减性，并确定其最大值.

4. 证明函数 $f(x)=x^3-2x^2+2x-7$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增.

1.2.8 二次函数的图象和性质——对称性

一、从解析式看函数奇偶性

从图上看函数的性质，直观简捷，但对于图象不是直线的函数，我们的观察是不是可靠呢？

配合解析式的分析，就更全面了.

在 1.2.3 节，我们在观察函数图象时，提到过奇函数和偶函数的概念：偶函数的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，奇函数的图象是以原点为对称中心的中心对称图形.

如何从数量关系上刻画函数的奇偶性呢？这要从轴对称图形和中心对称图形的特征来探索.

说偶函数 $F(x)$ 的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，具体是什么意思呢？这就是说，若点 A 在图象上，则点 A 关于 y 轴的对称点 B 也在图象上.

知道了函数是奇函数或偶函数，就只需要研究 $x>0$ 或 $x<0$ 时函数值的变化规律，差不多省一半力气.

回忆一下，点 A 和它关于 y 轴的对称点 B 之间有什么关系呢？

那就是：y 轴是线段 AB 的垂直平分线. 这表明：

(1) A，B 在 y 轴两侧，并且两点到 y 轴的距离相等，所以两点的横坐标符号相反，绝对值相等. 于是，如果 $A=(x, F(x))$，则 $B=(-x, F(-x))$.

(2) 直线 AB 平行于 x 轴，所以 A，B 在 x 轴同侧，并且到 x 轴的距离相等，这表明两点的纵坐标相等，即 $F(-x)=F(x)$.

反过来，如果对于 $F(x)$ 的定义域中的任意的 x，$F(-x)$ 都有定义并且满足 $F(-x)=F(x)$，这表明图象上任一点 $(x, F(x))$ 关于 y 轴的对称点 $(-x, F(x))=(-x, F(-x))$ 也在图象上，即 $F(x)$ 的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

原来偶函数就是满足条件 $F(-x)=F(x)$ 的函数.

请自己证明：奇函数是满足条件 $F(-x)=-F(x)$ 的函数.

知道了函数的解析式，检查奇偶性比作图观察既方便又准确.

上面的讨论概括如下：

(1) **如果对一切使 $F(x)$ 有定义的 x，$F(-x)$ 也有定义，并且 $F(-x)=F(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 为偶函数；**

（2）**如果对一切使 $F(x)$ 有定义的 x，$F(-x)$ 也有定义，并且 $F(-x)=-F(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 为奇函数.**

例 1 检验下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=ax^2+b$；（2）$g(x)=\dfrac{k}{x}$；（3）$h(x)=kx$.

解 （1）$f(-x)=a(-x)^2+b=ax^2+b=f(x)$，故为偶函数.

（2）$g(-x)=\dfrac{k}{-x}=-\left(\dfrac{k}{x}\right)=-g(x)$，故为奇函数.

（3）$h(-x)=k(-x)=-kx=-h(x)$，故为奇函数.

练习

判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x+\dfrac{x^3}{5}-\dfrac{x^5}{10}$；（2）$f(x)=3-\dfrac{x^2}{3}$；

（3）$f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{3+x^4}}$；（4）$f(x)=1-2x+x^3$.

这几个函数的图象如图 1-31，你能在图中分别标出对应的函数吗？

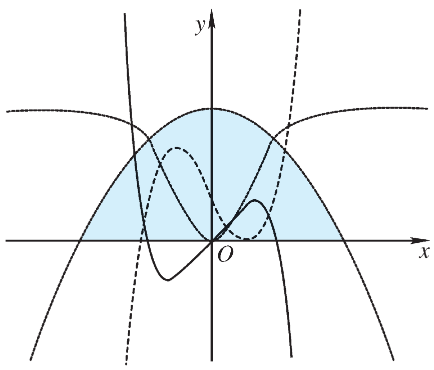


图 1-31

奇偶两字，从何而来？

x^6，x^4，x^2 都是偶函数.

x^5，x^3，x 都是奇函数.

二、二次函数图象的对称性

上面看到，缺少一次项的二次函数 $y=ax^2+c$ 是偶函数，其图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形.

一般的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，其图象也是轴对称图形．但对称轴不一定是 y 轴，而是过顶点平行于 y 轴的直线.

要说明其图象的轴对称性，可通过配方把它改写成：

$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}.$$

如果区间 $[u, v]$ 的中点是 $-\frac{b}{2a}$，也就是 $v-\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b}{2a}-u$，则 $\left|u+\frac{b}{2a}\right|=\left|v+\frac{b}{2a}\right|$，于是 $f(u)=f(v)$，这表明图象的对称轴是过顶点且平行于 y 轴的直线.

一般地，如果函数 $F(x)$ 有一条平行于 y 轴的对称轴，对称轴和 x 轴交点的坐标是 $(s, 0)$，则对任意的 h，有 $F(s+h)=F(s-h)$，反之亦然，如图 1-32.

> 如果记不住配方公式，可以这样做：
>
> ax^2+bx
> $=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)$
> $=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)$
> $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$，
>
> 所以
>
> ax^2+bx+c
> $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$
> $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$，
>
> 这里 $\Delta=b^2-4ac$，恰好是二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式.

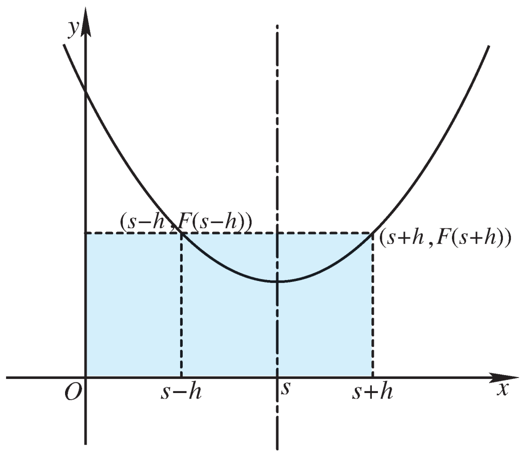


图 1-32

对二次函数则有

$$a(s+h)^2+b(s+h)+c=a(s-h)^2+b(s-h)+c.$$

整理后解出 $$s=-\frac{b}{2a}.$$

这里又一次证明了二次函数图象的轴对称性，并找到了对称轴.

三、二次函数图象的分类

根据二次函数图象的开口方向以及图象和 x 轴的公共点数，我们可以把二次函数的图象区别为图 1-33 中的六种形态. 这里，以 $a>0$ 的三种形态为例，因为图象顶点的纵坐标是 $y_0=-\dfrac{\Delta}{4a}$，由此可得：

(1) 如 $\Delta<0$，图象总在 x 轴上方，二次函数的所有函数值恒正；

(2) 如 $\Delta=0$，图象和 x 轴切于点 $(x_0,0)$，这里，$x_0=-\dfrac{b}{2a}$ 正好是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的"相等"实根，图象除这一点外都在 x 轴上方；

(3) 如 $\Delta>0$，图象和 x 轴交于两点 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$，这里 $x_1<x_2$，是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个不等实根. 对应于 $x\in(x_1,x_2)$，图象在 x 轴下方，当 x 在 $[x_1,x_2]$ 之外，图象在 x 轴上方.

$a<0$ 时有类似结论.

请在图 1-33 的六个二次函数的图象旁注明它们对应的 a 和 Δ 的正负.

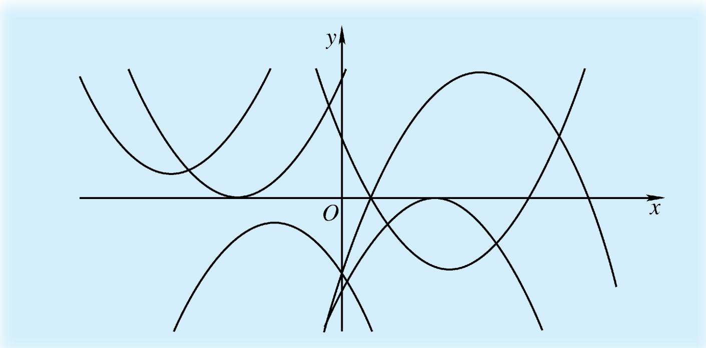


图 1-33

例 2 写出二次函数 $f(x)=(x-m)^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=m$ 处取到最小值 $f(m)=0$，但 m 是一个变化的值，由于 m 的大小不同，答案也就不同了. 如图 1-34.

(1) 当 $m<-1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上递增，在 $x=1$ 时取到最大值 $f(1)=(1-m)^2$，当 $x=-1$ 时取到最小值 $f(-1)=(1+m)^2$；

(2) 当 $-1\leqslant m\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,m]$ 上递减，在区间

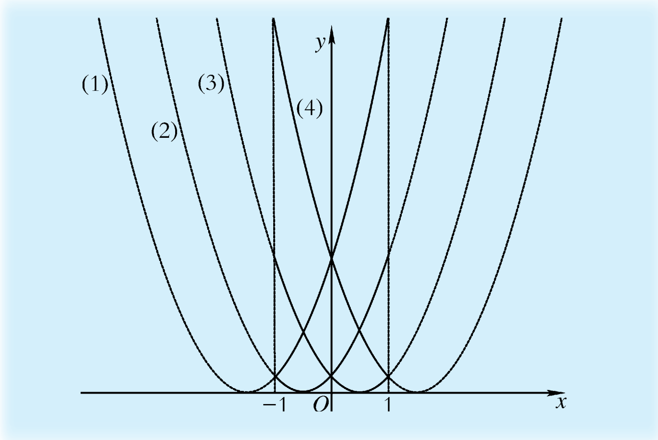


图 1-34

$[m,1]$上递增，当 $x=1$ 时取到最大值 $f(1)=(1-m)^2$，在 $x=m$ 时取到最小值 $f(m)=0$；

让 m 取个具体数值，就容易明白了.

(3) 当 $0\leqslant m\leqslant 1$ 时，函数 $f(x)$在区间$[-1,m]$上递减，在区间$[m,1]$上递增，当 $x=-1$ 时取到最大值 $f(-1)=(1+m)^2$，在 $x=m$ 时取到最小值 $f(m)=0$；

(4) 当 $m\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$在区间 $[-1,1]$ 上递减，当 $x=-1$时取到最大值 $f(-1)=(1+m)^2$，当 $x=1$ 时取到最小值 $f(1)=(1-m)^2$.

习题 11

学而时习之

1. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4-2x^2$；　　(2) $f(x)=x^5-x$；

(3) $f(x)=x^3+1$；　　(4) $f(x)=|x|$；

(5) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$；　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$.

2. 求二次函数 $y=x^2-6x+7$ 在区间$[-2,4]$上的最大值和最小值.

数学实验

用计算机研究二次函数的图象

使用"Z+Z 超级画板"或其他具有类似功能的软件，在计算机上作函数的图象既快捷又准确.

如果不熟悉具体的操作，可以要求帮助. 方法是：用鼠标的左键单击上方菜单项"作图"打开菜单，将鼠标光标向下移动到"函数或参数方程曲线"处，同时按一下 F1 键，屏幕上就会出现帮助文件. 仔细阅读，就知道作出函数曲线的操作方法了. 这是学习软件操作的简便方法. 若要真正学会就需动手使用. 建议顺次进行以下操作：

1. 输入函数的表达式：执行菜单命令"作图｜函数或参数方程曲线"，或在右键菜单里单击"函数或参数方程曲线". 在出现的对话框里输入函数的表达式 x^2＋3＊x－2，单击"确定"，二次函数 $y=x^2+3x-2$ 的图象就出现了.

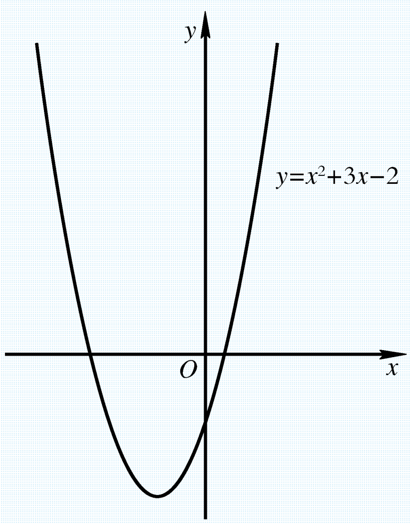


图 1-35

从这里可以看到，在计算机上作图时输入的表达式和课本上的有些不同，x^2 要写成 x^2，$3x$ 要写成 3＊x.

一般来说，知道下列几点就可以输入常见的表达式了：

(1) 当 k 是整数时，x^k 写成 x^k. 例如 x^3 写成 x^3，m^5 写成 m^5.

(2) 乘号不能省略，要写成＊号. 例如 $3x$ 写成 3＊x，ab 写成 a＊b.

在"Z＋Z 超级画板"提供的环境下，计算机不仅能画函数的图象，还能作得更多：

A. 根据输入的表达式和作图范围画出对应的曲线；

B. 表达式中的系数可以是字母，让曲线随字母的值连续变化；

C. 作图区间端点可用字母表示；

D. 在曲线上取运动点，测量点的坐标；

E. 根据输入坐标作点；

F. 根据表达式和曲线作出函数表；

G. 对变化的曲线跟踪，显示出一簇曲线来；

H. 将曲线平移、反射和旋转；

I. 输入自变量和对应函数值描点画曲线；

J. 根据文本文件中的数据描点画曲线；

K. 在屏幕上手工取点，计算机描点画曲线.

本次实验用到的功能有 A、B、C、D、E.

若用的是免费的超级画板，操作可参看 29 页的旁注：在程序区键入函数作图命令：

Function(x,x^2＋3＊x－2,x,－10,10,200,)；

光标放在分号";"后面，同时按 Ctrl 和 Enter 键执行.

函数表达式输入对话框见 29 页.

也可以在程序工作区键入命令画函数图象，见 21 页.

(3) 分式用左斜杠/表示．例如$\frac{2}{3}$写成 2/3，$\frac{x+2}{a+1}$写成(x+2)/(a+1)．

(4) 根式用分数指数表示．例如$\sqrt{2}$写成 2^(1/2)，$\sqrt[3]{x-2}$写成(x−2)^(1/3)．

这些书写方法在国内外数学软件中是普遍使用的．

2．输入带字母系数的表达式：若在对话框里输入函数的表达式 a*x^2+b*x+c，单击“确定”，这时出现的图象与系数 a，b，c 的当前值有关．

3．改变字母系数的值：执行菜单命令“插入｜变量对象”，在打开的对话框里输入变量名 a，单击“确定”作出 a 的变量尺．拖动变量尺上的滑钮改变 a 的值，观察图象的变化．类似地作出 b，c 的变量尺，观察 b，c 改变时曲线的变化，探索下列问题：

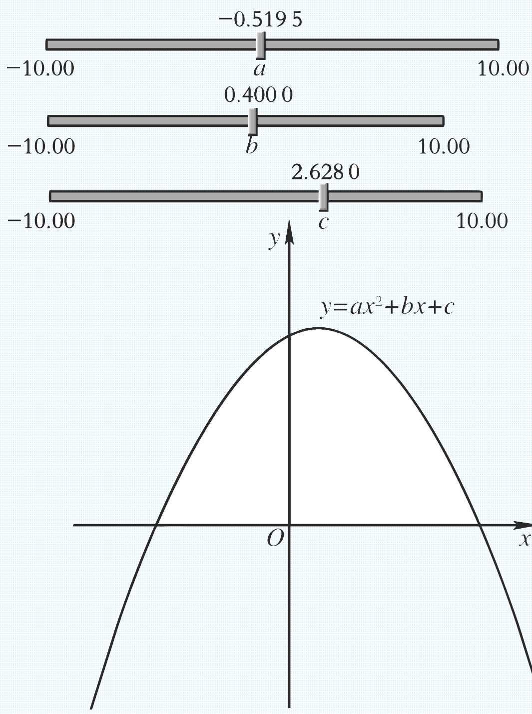
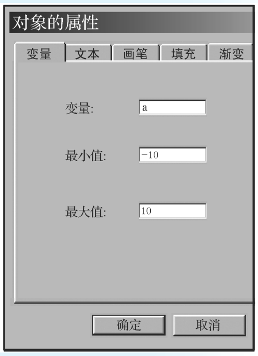


图 1-36

(1) 当 $a>0$ 时和 $a<0$ 时曲线有什么不同的特点？

(2) 当 a 等于或接近于 0 时，曲线成了什么样子？

(3) 当 $b>0$ 时和 $b<0$ 时曲线有什么不同的特点？



插入变量尺的对话框

若用的是免费的超级画板，可在程序区键入命令：

Variable(a,);

Variable(b,);

Variable(c,);

光标放在第 3 行的分号“;”后面，同时按 Ctrl 和 Enter 键执行，即可作出 a,b,c 的变量尺．

后面作坐标点．

例如，作坐标点(3，5)的命令是：

Point(3,5,,,,);

如果写成

Point(3,5,);

则作出的是可以拖动的自由点．

注意：所有命令要在英文状态输入．

(4) 当 b 等于或接近于 0 时，曲线的位置有什么特点？

(5) 当 c 变大或变小时，曲线的形状和位置如何变化？

(6) 当 c 等于或接近于 0 时，曲线的位置有什么特点？

你能解释观察到的这些现象吗？

4. 将自变量的范围设置为字母变量：右键单击曲线打开右键菜单，在菜单里单击“属性”打开曲线的属性设置对话框，在下部“参数范围”栏里分别键入字母 u 和 v，单击“确定”关闭对话框. 这时 x 的变化范围在 u，v 之间. 如果 u，v 相差很小，图形就几乎不见了.

5. 作出几个关键的点：右键单击打开右键菜单，在右键菜单里单击“坐标点”打开坐标输入对话框，输入下列点的坐标：$(u,0)$，$(v,0)$，$(x,0)$，$(u,a*u\hat{}2+b*u+c)$，$(v,a*v\hat{}2+b*v+c)$，$(x,a*x\hat{}2+b*x+c)$，$(-b/(2*a),c-b\hat{}2/(4*a))$. 注意在前面 3 个点的“$x$ 拖动”栏里，分别键入拖动参数 u，v，x，这样用鼠标拖动点时就能改变对应参数的值. 单击“确定”，就作出了 7 个点. 调整字母系数 a，b，c 的大小，使 7 个点都能看见. 将这些点的名字顺次改为 u，v，x，A，B，P 和 D.

6. 调整关键点位置：用鼠标拖动 x 轴上的 3 点，使 $u<x<v$，用虚线段把横坐标相同的两点分别连起来. 自 P 向 y 轴引垂足，命名为 y（如图 1－37).

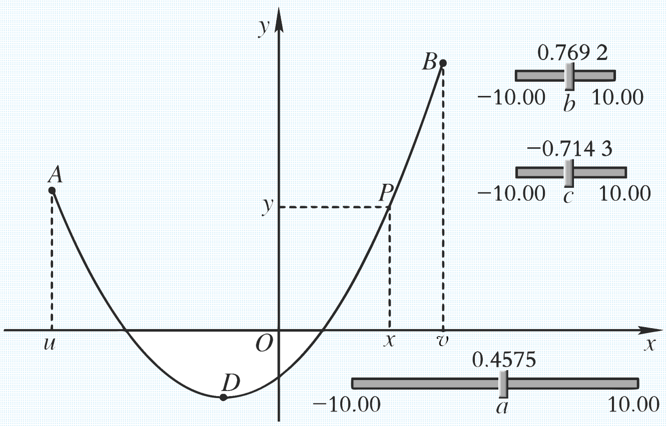
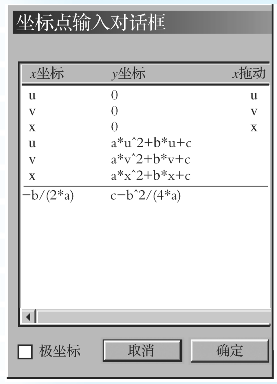


图 1－37



坐标点输入对话框

若用的是超级画板的免费版本，可在程序区键入下列命令：

Point$(u,0,u,,,u)$;

Point$(v,0,v,,,v)$;

Point$(x,0,x,,,x)$;

Point$(u,a*u\hat{}2+b*u+c,,,,A)$;

Point$(v,a*v\hat{}2+b*v+c,,,,B)$;

Point$(x,a*x\hat{}2+b*x+c,,,,P)$;

Point$(-b/(2*a),c-b\hat{}2/(4*a),,,,D)$;

光标放在最后一行的分号“;”后面按 Ctrl＋Enter 键即可作出坐标点.

命令中的参数，第 1，2 项是 x 和 y 的坐标，第 3，4 项是水平（x）方向的拖动变量和铅垂（y）方向的拖动变量，第 5 项的值为“right”或“polar”，分别表示坐标为直角坐标或极坐标，如果缺省系统默认是直角坐标，第 6 项为点的名字.

的对话框上方的栏里键入 u，单击“确定”，屏幕上就显示出 u 的当前值．继续测量 v，x，a，b，c 以及表达式 b^2－4＊a＊c，－b/(2＊a)，c－b^2/(4＊a) 和 a＊x^2＋b＊x＋c．

10．通过观察函数 f(x)＝a＊x^2＋b＊x＋c 的图象和测量数据，填写下列语句中的空白或回答问题：

(1) 当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间[u,(　)]上递减，在区间[(　),v]上递增．

(2) 当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间[(　),(　)]上递增，在区间[(　),(　)]上递减．

(3) 当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=$(　)处取到最小值(　)．

(4) 当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=$(　)处取到最大值(　)．

(5) 当（　）>0 时，函数 $f(x)$ 的曲线和 x 轴有两个交点．

(6) 当（　）<0 时，函数 $f(x)$ 的曲线和 x 轴没有交点．

(7) 当 $a>0$ 时，如何确定 $f(x)$ 在闭区间 $[u, v]$ 上的最大值？

(8) 当 $-\dfrac{b}{2a}$ 不属于[u,v]时，如何确定 $f(x)$ 在闭区间[u,v]上的最大值？

(9) 关于函数 $f(x)$，你还能提出哪些问题？

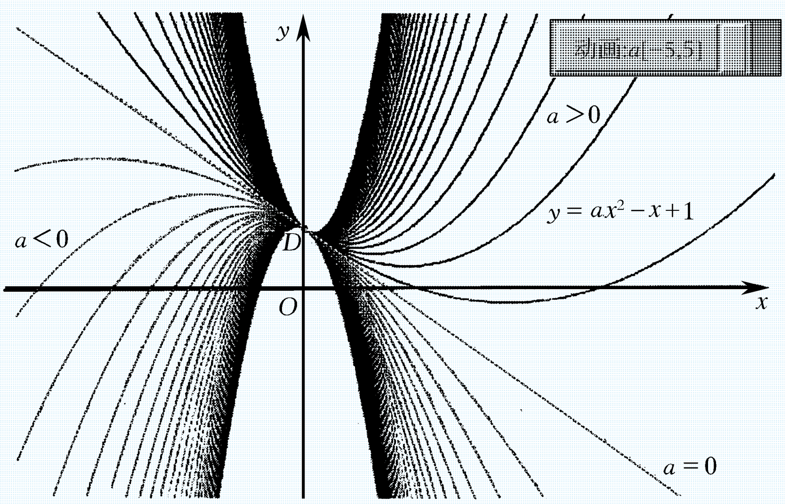


图 1-40

作出函数 $y=ax^2-x+1$ 的图象，再作变量 a 的动画．让 a 从 -5 变到 5，对图象跟踪，得到图 1－40 的曲线簇图象．观察 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 时图象的不同点．思考：a 满足什么条件时，图象和 x 轴没有公共点？

小结与复习

一、指导思想

为什么要学集合？

学集合是为了说话．数学里说话讲究简洁和准确．使用集合语言，可以简洁而准确地表达数学的内容，所以集合语言已成为现代数学的基本语言．如果你能够正确地使用最基本的集合语言表达有关的数学对象和数学事实，能够准确地理解别人用集合语言所表述的数学对象和数学事实，祝贺你，你已经具备了运用数学语言进行交流的初步能力，拿到了数学俱乐部的入场券．

其实，在日常说话和推理时，在小学和初中学习数学时，我们实际上常常不自觉地使用了集合的概念，只是不太严密，不够清楚．现在，联系着实际中和学过的数学知识中的例子，用集合的语言来辨析和表达，就会有更上一层楼的感觉．

集合到集合的确定性的对应叫映射，数集到数集的映射叫函数．

这样，就用集合和对应的语言更严谨地刻画了函数的概念．

为什么要学函数？

函数是描述客观世界变化规律的数学模型．函数的思想方法不仅将贯穿高中数学课程的始终，还会成为你今后可能学习或用到的数学知识的主旋律．小学到初中所学的数学知识，大都可以放到映射和函数的框架之中，大量的实际问题，可以用函数模型来描述和回答．用函数的观点看数学和其他学科里的许多问题，必有纲举目张的效果．

数学对象看不见、摸不着，所以讲究表示．函数的基本表示方法是画图和写出表达式．根据函数的表示来探索它的性质，是数学

的重要课题．函数的变化无非是变大变小，所以增减性具有基本的重要性．差分是研究函数增减性的有力的通用工具，要多用它解决有关函数增减和最大最小值的问题．对二次函数的讨论不过是小试牛刀．

对称是自然界的重要现象．知道了函数的表达式，能轻松地检验函数图象的一些对称性，有助于研究函数性质，也体现了函数观点的力量．

二、内容提要

1．本章主要内容有集合的初步知识；基于集合和对应观点的函数概念，函数的表示和基本性质；二次函数的性质和图象．

2．集合是最基本的数学概念，元素和集合的关系（属于或不属于），集合的关系及运算（包含、相等、交、并、补、差），这些都是今后经常要使用的数学概念，要能熟练地运用集合语言描述数学事实．

3．集合的表示方法有列举法、描述法和图象法，其中图象法又有维恩图表示和对特定数集（区间）在数轴上用图象表示的方法．

4．以 x 为自变量的函数 $y=f(x)$ 就是从它的定义域到值域的一个映射．设 $b=f(a)$，那么 (a, b) 就是函数图象上的一个点，所有这样的点组成的集合就是函数 $y=f(x)$ 的图象．

显然，任作垂直于 x 轴的直线，它和任一函数的图象最多只能有一个公共点．

5．函数的定义域有两种确定方式，即由解析式确定或由函数对应法则的实际含义所确定．一般来说，如给出了一个解析式而未说明它的实际含义，那么这一函数的定义域就是使解析式有意义的自变量的取值范围．

6．函数的单调递增和单调递减的概念、直观形象和基本判别方法；函数的最大(小)值和最大(小)值点的概念和直观形象；奇函数和偶函数的概念、直观形象和基本判别方法．

7. 二次函数的图象特征、增减性、对称性、顶点和在一个区间上的最大最小值.

8. 分段函数概念的引入是因为解决实际问题的需要，与分段函数有关的问题，必然要分段讨论，这里再次提醒，分段函数是一个函数而不是两个或更多个函数.

三、学习要求和要注意的问题

1. 关于集合的学习要求：

(1) 集合的含义与表示.

1° 通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系.

2° 能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

(2) 集合间的基本关系.

1° 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集，知道空集是任一集合的子集.

2° 在具体情境中，了解全集与补集的含义.

(3) 集合的基本运算.

1° 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集.

2° 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

3° 能使用维恩图表达集合的关系及运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用.

2. 关于函数概念的学习要求：

(1) 通过丰富实例，进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型，在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数，体会对应关系在刻画函数概念中的作用；了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.

(2) 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法(如图

象法、列表法、解析法）表示函数.

（3）通过具体实例，了解分段函数，并能简单应用.

（4）通过已学过的函数特别是二次函数，理解函数最大（小）值及其几何意义.

（5）能从图象近似地看出函数的递增或递减性，近似地看出函数的奇偶性. 对于解析式为整式或简单分式的函数，会检验其奇偶性. 知道怎样用计算差分的方法检验函数的增减性.

3. 学习中要注意的问题：

（1）集合学习中应特别注意搞清概念，对一些容易混淆的符号，一定要弄清它们的区别.

$\in$ 和 $\notin$ 表示的是元素与集合的关系，而 $=$、$\neq$、$\supseteq$、$\not\subseteq$ 所表示的是集合与集合间的关系，两者不可混淆. 例如，a 是元素，而 $\{a\}$ 是集合，两者间只能是 $a\in\{a\}$，而不能写成 $a=\{a\}$.

（2）构成函数的三要素（定义域、值域和从定义域到值域的对应法则）中，最重要的是对应法则. 在函数 $y=f(x)$ 中，$f(x)$ 表示的是对应法则，不是 f 与 x 的乘积.

在定义域和对应法则都已经确定的条件下，函数的值域也就唯一确定了. 因此，判别两个函数是不是同一个函数，只要看它们的定义域和对应法则在实质上是不是相同即可.

四、参考例题

例 1 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $[-6,6]$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上是 x 的一次式，在 $[3,6]$ 上是 x 的二次式且满足 $f(x)\leqslant f(5)=3$，$f(6)=2$. 求 $f(x)$ 的表达式.

解 由题设知 $f(x)$ 在 $[3,6]$ 上是二次函数，且在 $x=5$ 处取得最大值 3，故可设 $f(x)=-a(x-5)^2+3$，$a>0$.

又由 $f(6)=2$， 得 $2=-a(6-5)^2+3=-a+3$， 所以 $a=1$，$f(x)=-(x-5)^2+3$，$x\in[3,6]$.

由上式得 $f(3)=-(3-5)^2+3=-1$，而 $f(x)$ 在 $[-6,6]$ 上是奇

$f(x)$是奇函数且 $f(0)$存在，则由奇函数定义，有

$$f(0)=f(-0)=-f(0),$$

所以 $f(0)=0$.

函数，故 $f(0)=0$. 但 $f(x)$在$[0,3]$上是一次函数，所以 $f(x)=-\frac{1}{3}x$.

于是 $$f(x)=\begin{cases}(x+5)^2-3, & x\in[-6,-3];\\ -\frac{1}{3}x, & x\in(-3,\ 3);\\ -(x-5)^2+3, & x\in[3,\ 6].\end{cases}$$

例 2 如图 1-41，在边长为 2 的正方形 $EBCD$ 的周界上，点 $P(x,\ y)$ 从点 A 出发沿 $ABCDE$ 的方向移动，如果这个动点 P 从 A 出发前进的距离为 s，则每一个 s 都对应唯一一个 y. 对应法则为

$$s\xrightarrow{P\text{ 点移动距离 }s\text{ 时所在位置的纵坐标}}y.$$

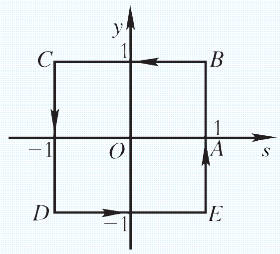


图 1-41

显然，动点 P 由 A 移动一周时的函数解析式为

$$y=\begin{cases}s, & 0\leqslant s<1;\\ 1, & 1\leqslant s<3;\\ 4-s, & 3\leqslant s<5;\\ -1, & 5\leqslant s<7;\\ s-8, & 7\leqslant s\leqslant 8.\end{cases}$$

由此不难画出其图象，见图 1-42.

点 P 移动一周到点 A 后，即移动 8 个单位，若继续移动，函数值开始重复，以后每移动一周（即移动 8 个单位），函数值就重复一次. 这是一种周期现象，其函数解析式为

$$y=\begin{cases}s, & 8n\leqslant s<8n+1;\\ 1, & 8n+1\leqslant s<8n+3;\\ 4-s, & 8n+3\leqslant s<8n+5;\\ -1, & 8n+5\leqslant s<8n+7;\\ s-8, & 8n+7\leqslant s<8n+8.\end{cases}$$

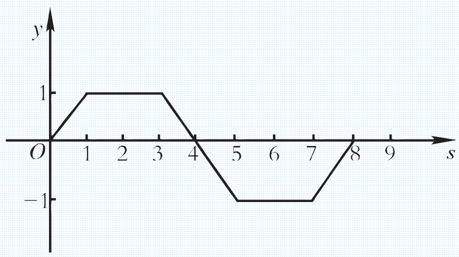


图 1-42

其中 n 为非负整数. 你能画出它的图象吗？

复习题一

学而时习之

1. 数集 $X=\{x \mid x=2n+1, n\in \mathbf{Z}\}$ 与数集 $Y=\{x \mid x=4k\pm 1, k\in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是（　　）

(A) $X\subsetneqq Y$　　(B) $X\supsetneqq Y$　　(C) $X=Y$　　(D) $X\neq Y$

2. 设集合 $X=\{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$，$Y=\{1, 3, 6, 8, 9\}$，$Z=\{3, 7, 8\}$，那么集合 $(X\cap Y)\cup Z$ 是（　　）

(A) $\{0, 1, 2, 6, 8\}$　　(B) $\{3, 7, 8\}$

(C) $\{1, 3, 7, 8\}$　　(D) $\{1, 3, 6, 7, 8\}$

3. 已知全集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 6\}$，集合 $\{2, 7, 8\}$ 是（　　）

(A) $A\cup B$　　(B) $A\cap B$

(C) $\complement_I A\cup \complement_I B$　　(D) $\complement_I A\cap \complement_I B$

4. 设 S，T 是两个非空集合，且 S 不包含 T，T 不包含 S，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于（　　）

(A) X　　(B) T　　(C) $\varnothing$　　(D) S

5. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的子集总共有（　　）

(A) 7 个　　(B) 8 个　　(C) 6 个　　(D) 5 个

6. 如果 $I=\{a, b, c, d, e\}$，$M=\{a, c, d\}$，$N=\{b, d, e\}$，其中 I 是全集，那么 $\complement_I M\cap \complement_I N$ 等于（　　）

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$　　(C) $\{a, c\}$　　(D) $\{b, e\}$

7. 已知 I 为全集，集合 M，$N\subsetneqq I$，若 $M\cap N=N$，则（　　）

(A) $\complement_I M\supseteq \complement_I N$　　(B) $M\subseteq \complement_I N$

(C) $\complement_I M\subseteq \complement_I N$　　(D) $M\supseteq \complement_I N$

8. 已知全集 $I=\{0, -1, -2, -3, -4\}$，集合 $M=\{0, -1, -2\}$，$N=\{0, -3, -4\}$ 则 $\complement_I M\cap N=$（　　）

(A) $\{0\}$　　(B) $\{-3, -4\}$

(C) $\{-1, -2\}$ (D) $\varnothing$

9. 设全集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$；集合 $A=\{1, 3, 5, 7\}$，$B=\{3, 5\}$，则 (　　)

(A) $I=A\cup B$ (B) $I=\complement_I A\cup B$

(C) $I=A\cup\complement_I B$ (D) $I=\complement_I A\cup\complement_I B$

10. 已知全集 $I=\mathbf{N}$，集合 $A=\{x \mid x=2n, n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x=4n, n\in\mathbf{N}\}$，则 (　　)

(A) $I=A\cup B$ (B) $I=\complement_I A\cup B$

(C) $I=A\cup\complement_I B$ (D) $I=\complement_I A\cup\complement_I B$

11. 设集合 $M=\{x \mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $N=\{x \mid x^2-2x-3<0\}$，则集合 $M\cap N=$ (　　)

(A) $\{x \mid 0\leqslant x<1\}$ (B) $\{x \mid 0\leqslant x<2\}$

(C) $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ (D) $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

12. 检验下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3-x^2$； (2) $g(x)=\dfrac{3x}{1-x^2}$；

(3) $h(x)=\sqrt{x^4-7}$； (4) $k(x)=5-\dfrac{x}{3}-x^3-x^5$.

温故而知新

13. 如图 1-43，I 是全集，M，P，S 是 I 的三个子集，则阴影部分所表示的集合是 (　　)

(A) $(M\cap P)\cap S$

(B) $(M\cap P)\cup S$

(C) $(M\cap P)\cap\complement_I S$

(D) $(M\cap P)\cup\complement_I S$

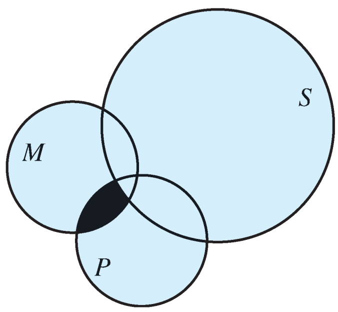


图 1-43

14. 已知映射 f：$A\to B$，其中，集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，且对任意的 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则集合 B 中元素的个数为 (　　)

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

15. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$，映射 f：$A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是（　　）

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

16. 设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是（　　）

(A) 11　　(B) 10　　(C) 16　　(D) 15

17. 设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则（　　）

(A) $M=N$　　(B) $M\subsetneqq N$

(C) $N\supsetneqq M$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

18. 二次函数 $y=f(x)$的图象如图 1-44 所示，那么此函数为（　　）

(A) $y=x^2-4$

(B) $y=4-x^2$

(C) $y=\frac{3}{4}(4-x^2)$

(D) $y=\frac{3}{4}(2-x)^2$

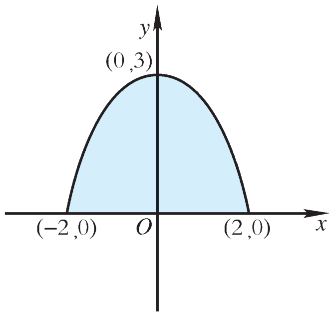


图 1-44

19. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么（　　）

(A) $f(2)<f(1)<f(4)$　　(B) $f(1)<f(2)<f(4)$

(C) $f(2)<f(4)<f(1)$　　(D) $f(4)<f(2)<f(1)$

20.《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算.

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2 000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5 000 元的部分	15%
…	…

某人 1 月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于(　　)

(A) 800～900 元　　(B) 900～1 200 元

(C) 1 200～1 500 元　　(D) 1 500～2 800 元

21. 设 $H(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 画出函数 $H(x-1)$ 的图象.

22. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域.

23. 求函数 $y=-x^2+4x-2$ 在区间 $[0,\ 3]$ 上的最大值和最小值.

24.* 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使 n 次测量分别得到 a_1，a_2，…，a_n 共 n 个数据. 规定所得物理量的“最佳近似值” a 是这样一个量，与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小. 照这一规定，从 a_1，a_2，…，a_n 推出的“最佳近似值” $a=$？

上下而求索

设计饮料罐

某种罐装饮料设计每罐容积为 360 cm^3，罐的形状为圆柱体. 圆柱侧面厚度为 0.5 mm，上下底厚度为侧面厚度的 3 倍，都是用铝片加工而成.

(1) 圆柱的高 H 和半径 R 之间是否存在函数关系？若有函数关系，选择其中一个为自变量，用你认为适当的方式给出函数的表示.

(2) 这样的一个铝罐所用的铝的体积 V 是不是 H 或 R 的函数？若是，写出函数的解析式，并画出函数的图象.

(3) 制作这样一个铝罐，最少要用多少克铝？这时铝罐的直径和高度分别是多少厘米（铝的密度约等于 3 g/cm^3）？

(4) 测量一些饮料罐的直径和高度，和自己得到的结果对比.

通常铝的比重约为 2.7，但压成铝片密度会增大.

第 2 章

指数函数、对数函数和幂函数

晨雾茫茫碍交通，
蘑菇核云蔽长空．
化石岁月巧推算，
文海索句快如风．
指数对数相辉映，
立方平方看对称．
解释大千无限事，
三族函数建奇功．

$$A = B^{C}$$

数量的单调增长和衰减的现象，大量出现在客观世界的变化过程之中．从乘方开方运算发展出来的指数函数、对数函数和幂函数，是描述增加或衰减过程的三种基本数学模型，又是沟通乘法和加法两种基本数学运算的桥梁，在理论和实践中扮演了重要角色．

问题探索

射线在介质中的衰减

夏天在野外旅行，日光晒得人好苦，多想飞来一片云啊！

日光穿过云层，强度变弱了，这叫作射线在介质中的衰减.

检查身体有时要拍 X 光照片，由于射线在人体的不同器官组织处衰减的程度不同，对底片的影响也就不同，于是留下了影像.

超过一定剂量的 X 射线对人体有害. 这就需要在 X 射线光源和人员间放置铅板、混凝土板或其他屏蔽物使射线衰减到无害程度.

工业上用 γ 射线探伤仪探查金属零件的内部缺陷，同样要设置屏蔽物保护工作人员.

射线在介质中的衰减，对我们有时有利，有时有害，总之和我们利害相关，值得关心和研究.

同样的射线，在不同的介质中衰减的程度不同. 设某种射线强度为 Q，经过一定的介质屏蔽后的强度衰减为 P，我们就把比值 $k=\dfrac{P}{Q}$ 叫作该射线关于该屏蔽的传输系数，数 $1-k$ 叫作屏蔽效率，而 $F=\dfrac{Q}{P}=\dfrac{1}{k}$ 叫作该射线关于该屏蔽的衰减度.

当改变屏蔽物的厚度 x 时，传输系数 k 当然会随着变化. 在射线的种类和屏蔽物种类一定时，k 就是 x 的函数，记作 $k(x)$，我们叫它传输函数. 显然，屏蔽物越厚传输系数越小，即函数值 $k(x)$ 随自变量 x 的增大而减小，它是单调递减函数. 相反，衰减度则是单调递增函数.

研究射线在介质中的衰减规律，首先要确定函数 $k(x)$.

确定了函数 $k(x)$ 以后，接着还有一系列问题. 例如：

射线衰减不见得都有好处，大雾的天气，高速公路封闭，机场航班延误，都是因为光线通过浓雾时衰减得太多了.

激光通信过程中，激光信号在光纤中传播时，同样会衰减. 这时我们希望少衰减一些，使信号能有效地传递.

医学中广泛应用的 CT（X 射线计算机层析摄影仪）的研制成功是 20 世纪医学的奇迹. 其原理是基于不同的物质有不同的 X 射线衰减系数. 如果能确定人体的衰减系数的分布，就能重建其断层或三维图像，但通过 X 射线透射时，只能测量到人体的直线上的 X 射线衰减系数的平均值. 当直线变化时，此平均值（依赖于某参数）也随之变化. 能否通过此平均值求整个衰减系数的分布呢？人们利用数学中的 Radon变换解决了此问题，Radon 变换已成为 CT 理论的核心，首创 CT 理论的 A. M. Cormark（美）及第一台 CT 制作者 C. N. Hounsfield（英）因而荣获 1979 年诺贝尔医学和生理学奖. 由此可以看出数学在 CT 技术中的关键作用.

知道了屏蔽效率或衰减度，如何计算屏蔽物的厚度？

用一种屏蔽物质代替另一种时，如何换算厚度？

要对各种不同的厚度 x 来测定传输函数，工作量是很大的．但我们可以对单位厚度测出传输系数 a，即设已知函数值 $k(1)=a$，求 $k(x)$．

例如，医学中常用的钴 60 射线，穿过厚度为 1 cm 的铅板后，强度是原来的 0.568，就是说 $k(1)=0.568$.

一般地，$k(1)=a$ 时，强度为 Q 的射线穿过厚度为 1 单位的屏蔽物后，强度衰减为 aQ.

如果继续穿过厚度为 1 单位的屏蔽物呢？就再乘 a，成为 a^2Q. 也就是说，$k(2)=a^2$. 屏蔽物厚度 x 加 1，传输系数乘 a，对正整数 n 可以推出 $k(n)=a^n$.

让 $x=0$，屏蔽物厚度为 0，就是没有屏蔽，射线毫无损失地通过，传输系数为 1. 正好，$a^0=1$，所以 $k(0)=1=a^0$.

如果厚度 x 不是整数呢？

例如，钴 60 射线穿过厚度为 0.5 cm 的铅板后，强度是原来的多少倍呢？设为 u 倍，则穿过两个厚度为 0.5 cm 的铅板后，强度是原来的 u^2 倍．但两个厚度为 0.5 cm 的铅板效果等于厚度为 1 cm 的铅板，所以应当有 $u^2=0.568$，$u=\sqrt{0.568}=0.7537$.

一般来说，$k\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{k(1)}=\sqrt{a}$，进而有 $\left(k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=a$.

把 m 层厚度为 $\frac{1}{n}$ 的屏蔽板重叠起来考虑，得到 $k\left(\frac{m}{n}\right)=\left(k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m$.

对于整数的 x，已经知道 $k(x)=a^x$. 如果对于分数 $x=\frac{m}{n}$，也表达成

$$k\left(\frac{m}{n}\right)=a^{\frac{m}{n}}$$

就很方便了．

下面就来做这个工作．

用数学语言、符号或图形来刻画、描述和反映特定问题或具体事物之间关系所形成的数学结构，叫作数学模型．这里说的数学结构，可以是方程、方程组、函数、集合、图形、表格或这些数学对象的组合．你学过的许多数学概念和问题，都是简单的数学模型．

把实际问题化成数学问题，叫作建立数学模型．

数学模型把实际问题理想化、简单化了．

实际问题中，屏蔽物厚度不可能太小或太大，数学模型中，不必考虑得这么细致．

实际问题中，射线的强度小到一定程度就测不出来了．在数学模型中算出多小就多小．

传输函数是刻画射线屏蔽问题中屏蔽物厚度和屏蔽效果之间的关系的数学结构，是射线屏蔽问题的数学模型．

数学概念常常是在考虑实际问题时受到启发而产生的．

但概念形成之后，它就要服从推理的规律．

阅读与思考

放射性元素的衰变

从物理学中知道，许多元素具有放射性，它们经过一段时间之后会有一部分元素蜕变为其他元素，在这种蜕变过程中还会放出 α、β、γ 等粒子. 单位时间内蜕变的数量上的变化分数叫作该放射性元素的“衰变系数”.

例如，氡是放射性元素镭在衰变中所形成的一种气体，是放射治疗学上广泛应用的一种放射性的物质. 一个单位数量的氡每秒钟内有 $2.10\cdot10^{-6}$ 个单位会蜕变，因此，氡的衰变系数是 $2.10\cdot10^{-6}\ s^{-1}$.

我们设想，现在有一个单位数量的氡元素，那么，经过 1 s 后，所有的氡元素数已经不是一个单位数量了，因为其中有一小部分已经蜕变为其他元素了. 可以作如下“归纳”：

1 s 后剩余的氡元素是 $(1-2.10\cdot10^{-6})$ 单位数量；

2 s 后剩余的氡元素是

$$(1-2.10\cdot10^{-6})\cdot(1-2.10\cdot10^{-6}) \text{ 单位数量},$$

即 $$(1-2.10\cdot10^{-6})^2 \text{ 单位数量};$$

3 s 后剩余的氡元素是

$$(1-2.10\cdot10^{-6})^2\cdot(1-2.10\cdot10^{-6}) \text{ 单位数量},$$

即 $$(1-2.10\cdot10^{-6})^3 \text{ 单位数量};$$

依此类推，容易看出，经过 t s 后剩余的氡元素是

$$(1-2.10\cdot10^{-6})^t \text{ 单位数量}.$$

记一个单位数量的氡元素经过 t s 后剩余的氡元素数为 $f(t)$，并且记 $a=1-2.10\cdot10^{-6}$，则 $f(0)=1$；

$$f(1)=a, f(2)=a^2, \cdots, f(n)=a^n.$$

这里，$2.1\cdot10^{-6}$这个数实在太小了，用普通的计算器计算不太方便，我们只能近似地进行计算．把衰变系数转换一下：

$$2.10\cdot10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}=2.10\cdot10^{-6}\cdot3\,600\ \mathrm{h}^{-1}$$
$$=0.007\,56\ \mathrm{h}^{-1}.$$

（对氡来说，在一两个小时内可以这样计算，时间长了，这种换算就会失真．）

物理学上把放射性元素的半数原子蜕变所需时间叫作半衰期，我们可以近似地计算一下氡的半衰期．

一单位数量的氡元素经过蜕变，设在 t 小时后剩余的氡元素数量为 $f(t)$，则有 $f(t)=0.992\,44^t$.

设氡的半衰期为 T (h)，则有 $0.992\,44^T=0.5$，

用计算机、计算器或算盘来计算，得到

$(0.992\,44)^2=0.984\,937\cdots$　　$(0.992\,44)^3=0.977\,491\cdots$

$(0.992\,44)^4=0.970\,101\cdots$　　$(0.992\,44)^5=0.962\,767\cdots$

……

$(0.992\,44)^{91}=0.501\cdots$　　$(0.992\,44)^{92}=0.497\cdots$

所以可取 $T=91.5$ h，合约 3.8 天．实际上，氡元素的半衰期是 3.83 天．

这里的计算，用的是笨办法，一次一次地做乘法得出结果来．下面学了对数函数，就能简捷地计算了．

你发现了吗，射线屏蔽问题和放射性元素的衰变问题，有相同的数学模型．

即使用笨办法，也有捷径．

例如，算出了 $(0.992\,44)^2$ 后，自乘一次，就得 $(0.992\,44)^4$，再自乘，就得 $(0.992\,44)^8$，少用了 4 次乘法．

想一想，本来要做 91 次乘法，这样做，多少次就可以了？

练习

1. 设某放射性元素的衰变系数是 λ，半衰期是 T，请你写出这两者间的关系式．
2. 我们已经知道，放射性元素氡的半衰期是 3.83 天，问：

   (1) 要经过多少天，剩下的氡元素只有现在的 $\frac{1}{4}$；

   (2) 经过 $2\times3.83=7.66$ 天以后，氡元素会全部消失吗？

2.1 指数函数

2.1.1 指数概念的推广

在初中，我们引入了正整数指数次幂的概念，把 n（正整数）个实数 a 的连乘记作 a^n，后来，又把幂的概念扩大到整数范围，规定了当 $a\neq0$ 时有 $a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（$n\in\mathbf{N}$）.

如果把 a 看成常数，a^n 就成了 n 的函数. 记 $f(n)=a^n$，则 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 就是 $f(m)f(n)=f(m+n)$，这不就是传输函数 $k(x)$ 应当满足的关系 $k(u+v)=k(u)k(v)$ 吗？

我们还知道，整数指数幂的运算有下列规则：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

$$(a^m)^n=a^{mn},\quad (ab)^n=a^n\cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad (b\neq0).$$

下面，我们把整数指数幂推广到有理指数幂.

一、根式

若一个（实）数 x 的 n 次方（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant2$）等于 a：$x^n=a$，就说 x 是 a 的 n 次方根（nth root）. 3 次方根也称为立方根.

当 n 是奇数时，数 a 的 n 次方根记作 $\sqrt[n]{a}$.

$a>0$ 时，$\sqrt[n]{a}>0$；$a=0$ 时，$\sqrt[n]{0}=0$；$a<0$ 时，$\sqrt[n]{a}<0$.

例如，$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$；$x^3=-3$ 时有 $x=\sqrt[3]{-3}$.

当 n 是偶数时，正数 a 的 n 次方根有两个，它们互为相反数. 其中正的 n 次方根叫作算术根，记作 $\sqrt[n]{a}$. 也就是说，当 $a>0$ 时，如 $x^n=a$，那么 $x=\pm\sqrt[n]{a}$.

例如，若 $x^2=3$，则 $x=\pm\sqrt{3}$，若 $x^4=3$，则 $x=\pm\sqrt[4]{3}$.

再规定：$\sqrt[n]{0}=0$，负数没有偶次方根.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作**根式**（radical）（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant2$），n 叫作**根指数**（radical

exponent)，a 叫作**被开方数**(radicand).

根据上述定义，有 $(\sqrt{3})^2=3$，$(\sqrt[3]{-3})^3=-3$. 一般地，有

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

由根式的定义，又有

$$\sqrt[3]{3^3}=3,\quad \sqrt[3]{(-3)^3}=\sqrt[3]{-3^3}=-3,$$

$$\sqrt[4]{3^4}=3,\quad \sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{3^4}=3.$$

一般地，当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

例 1 化简下列各式：

(1) $\sqrt[3]{(-2)^3}$；　(2) $\sqrt[4]{(-2)^4}$；　(3) $\sqrt[3]{(3-a)^3}$；

(4) $\sqrt{(a-b)^2}$ $(a<b)$；　(5) $\sqrt{(3-a)^2}$.

解 (1) $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$.　(2) $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$.

(3) $\sqrt[3]{(3-a)^3}=3-a$.

(4) $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=-(a-b)=b-a$　$(a<b)$.

(5) $\sqrt{(3-a)^2}=|3-a|=\begin{cases}3-a, & a\leqslant 3;\\ a-3, & a\geqslant 3.\end{cases}$

常见错误：

注意，当被开方表达式含有字母时，有些同学会忽略正负号的考虑，在 $a<b$ 时开出 $(a-b)$ 来.

二、正数的分数指数幂

根式运算是一件相当麻烦的事. 例如，化简式子 $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}$ $(a,b\in\mathbf{R}_+)$，就要先把根式化为同次根式再按运算法则进行运算. 引入分数指数的概念可以大大简化根式运算.

当 $a>0$，m，$n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$ 时，规定

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},\qquad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=a^{-\frac{m}{n}}.$$

这样，$\sqrt{2^4}=2^{\frac{4}{2}}=2^2=4$，

$$\frac{1}{\sqrt[6]{3^3}}=3^{\left(-\frac{3}{6}\right)}=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

好的符号不仅能简化运算，更能启迪思维，为新概念的出现提供创新的环境.

如果再规定 0 的正分数指数幂为 0，0 没有负分数指数幂，那么，在 $a>0$ 时，对于任意有理数 m，n 仍有公式

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0).$$

这就把整数指数幂推广为有理指数幂了.

在一定条件下，负数也有分数指数幂，我们这里暂不进行讨论.

我们知道，对任意的正整数 n 和正数 a，若 $a>1$，则 $a^n>1$，若 $a<1$，则 $a^n<1$. 那么，对任意的正有理数$\frac{m}{n}$，$a^{\frac{m}{n}}$ 和 1 之间是否也有类似的关系呢？设 $a>1$，首先可以证明，必有 $a^{\frac{1}{n}}>1$.

不用反证法，你能证明这个事实吗？

用反证法 记 $a^{\frac{1}{n}}=b$，若 $b\leqslant 1$，则 $b^n=a\leqslant 1$，与所设 $a>1$ 矛盾，故 $b>1$.

于是，进一步可知，$a^{\frac{m}{n}}=b^m>1$.

作为练习，请你证明当 $a<1$ 时有 $a^{\frac{m}{n}}<1$.

综合起来得到：

对任意的正有理数 r 和正数 a，若 $a>1$ 则 $a^r>1$，若 $a<1$ 则 $a^r<1$.

根据负指数的意义和倒数的性质可得：

对任意的负有理数 r 和正数 a，若 $a>1$ 则 $a^r<1$，若 $a<1$ 则 $a^r>1$.

例 2 求值：(1) $16^{\frac{3}{4}}$；(2) $25^{-\frac{1}{2}}$；(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$；(4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

解 (1) $16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\cdot\frac{3}{4}}=2^3=8$.

(2) $25^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{25^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(5^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{5}$.

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=(3^{-1})^{-3}=3^3=27$.

(4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$.

例 3 把下列式子改写成分数指数幂的形式 $(a>0)$：

(1) $a\cdot\sqrt[3]{a}$；　(2) $a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}$；　(3) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}$.

解 (1) $a\cdot\sqrt[3]{a}=a\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{1+\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}}$.

(2) $a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}=a^2\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{2+\frac{3}{4}}=a^{\frac{11}{4}}$.

(3) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}=(a\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}$.

例 4 计算下列各式：

(1) $(3m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{3}{2}})\cdot(-4m^{-\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{3}})\div(-6m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{5}{6}})$；

(2) $(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{6}})^6$.

解 (1) $(3m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{3}{2}})\cdot(-4m^{-\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{3}})\div(-6m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{5}{6}})$

$=[3\cdot(-4)\div(-6)]m^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=2m^0n=2n.$

(2) $(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{6}})^6=(a^{\frac{1}{3}})^6(b^{-\frac{5}{6}})^6=a^2b^{-5}=\dfrac{a^2}{b^5}.$

前面我们说过，建立分数指数幂的目的之一是用于简化根式运算，下面举例子来说明.

例 5 用分数指数幂表示下列根式：

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}$ $(a,b\in\mathbf{R}_+)$； (2) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{27})\div\sqrt[6]{3}$；

(3) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}=(ab)^{\frac{1}{6}}.$

(2) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{27})\div\sqrt[6]{3}=(3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{3}{2}})\div3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}$

$=3^{\frac{1}{6}}-3^{\frac{4}{3}}.$

(3) $\sqrt[3]{xy^2(\sqrt{xy})^3}=[xy^2(xy)^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{3}}=[x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{7}{2}}]^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{7}{6}}.$

三、正数的无理数指数幂

现在，对于 $a>0$，当 x 是任意有理数时，a^x 都有了意义.

美中不足的是，在实际问题中变量 x 可以代表厚度或时间，它可以是无理数，正数的无理数指数幂怎么定义呢？

例如，我们还不知道 $a^{\sqrt{2}}$ 是什么意思．当然，我们可以规定 $a^{\sqrt{2}}$ 是一个实数，但要说明如何确定这个实数.

以 $\sqrt{2}$ 为例，我们知道 $\sqrt{2}=1.414\ 213\cdots$ 因此知道它比 1 大，比 2 小；比 1.4 大，比 1.5 小；比 1.41 大，比 1.42 小；比 1.414 大，比 1.415 小；比 1.414 2 大，比 1.414 3 小；…如果需要，我们能够把 $\sqrt{2}$ 算到任意多位小数，即把它的大小范围估计到任意的精确度，要多精确都可以达到. 这样就算确定了它. 类似的办法，可以确定实数 $a^{\sqrt{2}}$.

用 a 的有理数次幂来逼近其无理数次幂，可以要多精确就有多精

什么叫作确定了一个实数呢？

实数的基本属性就是它的大小. 大小是比较而言的. 确定了一个实数，就是确定了它和其他的数之间的大小关系.

有理数之间的大小关系是清楚的，如果知道了一个实数比哪些有理数大，比哪些有理数小，就算是确定了它.

例如，$a=2$ 时，要算 $2^{\sqrt{2}}$，先求出 $\sqrt{2}=1.414\ 213\cdots$ 在计算器或计算机上算出：
$2^{1.4}=2.639\ 0\cdots$
$2^{1.41}=2.657\ 3\cdots$
$2^{1.414}=2.664\ 74\cdots$
$2^{1.414\ 2}=2.665\ 119\cdots$
这一串数越来越接近 $2^{\sqrt{2}}$. 一般来说：
$\sqrt{2}$ 在 1 和 2 之间，$a^{\sqrt{2}}$ 也就在 a^1 和 a^2 之间；
再精确一点，$a^{\sqrt{2}}$ 在 $a^{1.4}$ 和 $a^{1.5}$ 之间；
再精确一点，$a^{\sqrt{2}}$ 在 $a^{1.41}$ 和 $a^{1.42}$ 之间；
再精确一点，$a^{\sqrt{2}}$ 在 $a^{1.414}$ 和 $a^{1.415}$ 之间；
……

确. 所以，任意正数 a 的无理数次幂就有了确定的意义. 于是，给了任意正数 a，对任意实数 x，a 的 x 次幂 a^x 都有了定义. 可以证明，有理数次幂的前述运算规律，对实数次幂仍然成立. 类似地，还有不等式：

对任意的正实数 x 和正数 a，若 $a>1$ 则 $a^x>1$，若 $a<1$ 则 $a^x<1$.

对任意的负实数 x 和正数 a，若 $a>1$ 则 $a^x<1$，若 $a<1$ 则 $a^x>1$.

练　习

1. 下列四式中正确的是（　　）

(A) $0^0=1$　　(B) $(-2)^{-2}=4$

(C) $3a^{-2}=\dfrac{1}{3a^2}$　　(D) $(-x)^5\div(-x)^3=x^2$

2. 已知 $x=1-2^3$，$y=1-2^{-3}$，则 $y=$（　　）

(A) $\dfrac{x-1}{x}$　(B) $\dfrac{2-x}{1-x}$　(C) $\dfrac{x}{x-1}$　(D) $\dfrac{x-2}{x-1}$

3. 若 $(\sqrt[n]{-3})^n$ 有意义，则 n 一定是（　　）

(A) 正偶数　(B) 正整数　(C) 正奇数　(D) 整数

4. 用根式的形式表示下列各式（式中字母都是正数）：

(1) $a^{\frac{1}{3}}$；　(2) $a^{\frac{2}{3}}$；　(3) $a^{-\frac{2}{3}}$；　(4) $a^{-\frac{3}{2}}$.

5. 用分数指数幂表示下列各式（式中字母都是正数）：

(1) $\sqrt[4]{a^3}$；　(2) $\sqrt[4]{(m+n)^3}$；　(3) $\sqrt[5]{(a+2b)^2}$；

(4) $\sqrt[4]{(m-n)^2}\ (m<n)$；　(5) $\sqrt{a^4b^3}$；　(6) $\dfrac{m^2}{\sqrt[3]{m}}$.

6. 求值（后两小题要求用计算器计算，精确到小数点后第二位.）：

(1) $125^{\frac{1}{3}}$；　(2) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{4}}$；　(3) $1\ 000^{-\frac{2}{3}}$；

(4) $\left(\dfrac{243}{32}\right)^{-\frac{2}{5}}$；　(5) $7.2^{-\frac{1}{3}}$；　(6) $4.7^{\frac{1}{2}}$.

7. 化简 $3^{-1}\cdot 2^{-2}\div 4^{-2}$.

8. 化简 $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}\cdot b}{4b^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+a^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)\cdot\sqrt[3]{a}\quad(a>0,b>0)$.

习题 1

学而时习之

1. 计算下列各式（式中字母都是正数）：

(1) $x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{12}}$；　　(2) $a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{6}}$；

(3) $(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^{6}$；　　(4) $\left(\dfrac{4s^{2}r^{-6}}{9t^{4}}\right)^{\frac{3}{2}}$；

(5) $6x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\div\left(\dfrac{3}{2}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)$；　　(6) $(x^{2}-2+x^{-2})\div(x^{2}-x^{-2})$；

(7) $(x-y)\div(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$；　　(8) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$.

2. 已知 $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$，$b=(2-\sqrt{3})^{-1}$，求：

(1) $(a^{3}b^{3})^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $a-b$.

3. 化简：$\sqrt[3]{2-\dfrac{62}{27}}+\sqrt{\left(-3\dfrac{2}{3}\right)^{2}}-3\div16^{-0.75}+\sqrt[5]{2}\cdot(4^{-\frac{1}{5}})^{-2}$.

温故而知新

4. 如 $2^{x}+2^{-x}=5$，求 $4^{x}+\dfrac{1}{4^{x}}$的值.

5. 已知 $x>1$，且 $x+x^{-1}=3$，求下列各式的值：

(1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$；　　(2) $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$；　　(4) $x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$.

6. 已知 $x=\dfrac{1}{8}$，求值：$\dfrac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}$.

2.1.2　指数函数的图象和性质

函数 $y=a^x$ 叫作**指数函数**(exponential function)，其中 a 是不等于 1 的正实数，函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

例 1　作出指数函数 $y=a^x$ 的图象，其中 a 分别等于 2 和 10.

列表如下：(如图 2-1)

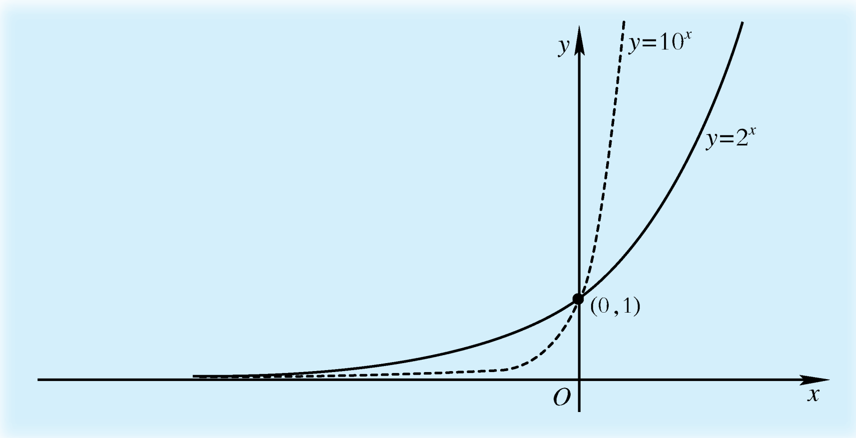


图 2-1

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	…
x	…	-1	-0.5	0	0.5	1	…		
$y=10^x$	…	0.1	0.32	1	3.16	10	…		

指数函数 $y=2^x$，$y=10^x$ 的底数（2 和 10）都大于 1. 一般地，当底数 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 的图象走向类似于图 2-1.

从图象可以“读”出的指数函数 $y=a^x$ $(a>1)$ 的性质有：

(1) 图象总在 x 轴上方，且图象在 y 轴上的射影是 y 轴正半轴(不包括原点). 由此，函数的值域是 $\mathbf{R}_+$.

(2) 图象恒过点 $(0,1)$，用式子表示就是 $a^0=1$.

(3) 函数是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的递增函数，由此有：

当 $x>0$ 时有 $a^x>a^0=1$；当 $x<0$ 时有 $0<a^x<a^0=1$.

如果底数 $a\in(0,1)$，那么，它的倒数 $\frac{1}{a}>1$，

$$y=a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x},$$

它的图象和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称，如图 2-2，可以类似地得到函数 $y=a^x$ $(0<a<1)$ 的性质：

(1) 图象总在 x 轴上方，且图象在 y 轴上的射影是 y 轴正半轴（不包括原点）. 由此，函数的值域是 $\mathbf{R}_+$.

(2) 图象恒过点 $(0, 1)$，用式子表示就是 $a^0=1$.

(3) 函数是区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的递减函数，由此有：当 $x>0$ 时有 $0<a^x<a^0=1$；当 $x<0$ 时有 $a^x>a^0=1$.

从解析式也可以看出指数函数的单调性. 只要计算差分：

$$a^{x+h}-a^x=a^xa^h-a^x=a^x(a^h-1).$$

由于 $a^x>0$，差分的正负取决于 (a^h-1) 的正负. 注意到 $h>0$，于是当 $a>1$ 时 $a^h>1$，故 $(a^h-1)>0$，函数递增，当 $0<a<1$ 时 $(a^h-1)<0$，函数递减.

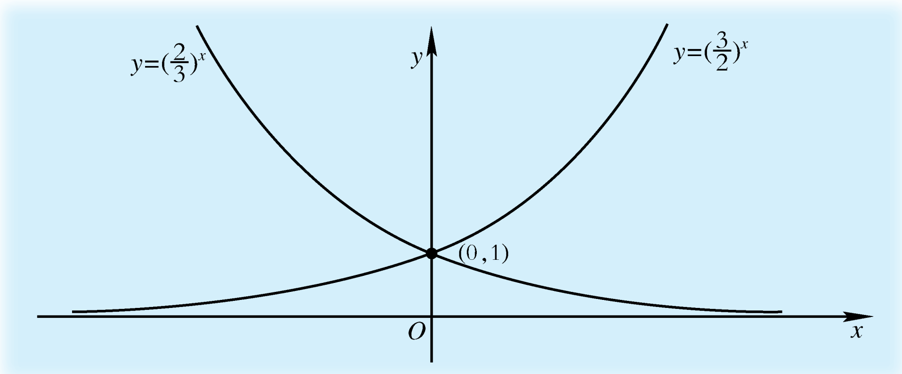


图 2-2

例 2 一种放射性物质不断衰变为其他物质，每经过 1 年剩留的量是原来的 84%，画出这种物质的剩留量随时间变化的图象，并从图象上求出大约要经过多少年，剩留量是原来的 50%？

解 可以假设原来的量是 1 个单位，经过 x 年后，剩留量是 y，容易得到关系式 $y=(0.84)^x$. 列表如下：

x	…	0	1	2	3	4	5	6	…
$y=0.84^x$	…	1	0.84	0.71	0.59	0.50	0.42	0.35	…

如下页图 2-3，从图上和表中都可以看到，大约经过 4 年，剩留量是原来的 50%.

在第一章内，我们已经见到了用变换法解决与函数图象平行、对称有关的问题. 其中包括函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴成轴对称图形.

前面说过，指数函数 $y=f(x)$ 有如下性质：$f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，这是指数函数的最基本的性质.

当然，满足上述关系的函数不一定就是指数函数，比方说，常数函数 $y=1$，$y=0$ 也满足上述关系.

如果函数 f 满足上述关系，并且 $f(c)=0$，则对任意的 x，有

$f(x)=f(x-c+c)=f(x-c)f(c)=0$，

可见，$f(x)$ 只要不恒为 0，就处处不等于 0.

又因为

$f(x)=f(x+0)$
$=f(x)f(0)$，

可见只要 $f(x)$ 不恒为 0，一定有 $f(0)=1$.

指数函数 a^x，当 $x=0$ 时，取值为 1，绝非偶然.

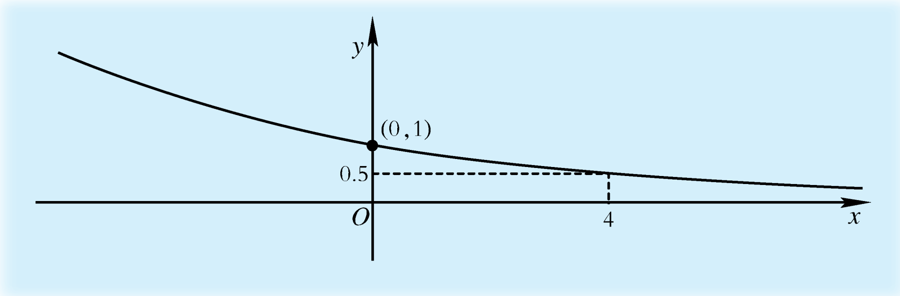


图 2-3

比较两个正数 a,b 的大小，可以用求商法：

若 $\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$；

若 $\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$.

比较两个数 a,b 的大小，可以找第三个数 c 帮忙：

若 $a<c$，$c<b$，则 $a<b$；

若 $a>c$，$c>b$，则 $a>b$.

例 3 比较下列各组数间的大小：

(1) $3.5^{1.5}$ 和 $3.5^{1.3}$；　　(2) $0.3^{1.5}$ 和 $0.3^{1.3}$；

(3) $0.7^{0.8}$ 和 $0.8^{0.7}$.

解 (1) $y=3.5^x$ 是递增函数，

因为 $1.5>1.3$，　所以 $3.5^{1.5}>3.5^{1.3}$.

(2) $y=0.3^x$ 是递减函数，

因为 $1.5>1.3$，　所以 $0.3^{1.5}<0.3^{1.3}$.

(3) $y=0.7^x$ 是递减函数，$0.7^{0.8}<0.7^{0.7}$.

由于 $\frac{0.8^{0.7}}{0.7^{0.7}}=\left(\frac{0.8}{0.7}\right)^{0.7}>1$，故 $0.7^{0.7}<0.8^{0.7}$，

所以 $0.7^{0.8}<0.7^{0.7}<0.8^{0.7}$.

练 习

1. 以 x 为自变量的四个函数中（注：e=2.718 28…），指数函数是（　　）

(A) $y=(e-1)^x$　(B) $y=(1-e)^x$　(C) $y=3^{x+1}$　(D) $y=x^2$

2. 指数函数 $y=f(x)$ 图象经过点 $(2,2)$，则 $f(1)=$（　　）

(A) 2　(B) $\sqrt{2}$　(C) $-\sqrt{2}$　(D) $\pm\sqrt{2}$

3. 函数 $y=2^{|3-x|}$ 的值域是（　　）

(A) $(0,+\infty)$　(B) $(0,1)$　(C) $(0,1]$　(D) $[1,+\infty)$

4. 在同一坐标系内作出下列各函数的图象：

(1) $y=3^x$；　(2) $y=3^{-x}$；　(3) $y=3^{x-1}$；　(4) $y=3^{1-x}$.

5. 比较下面各组数的大小：

(1) $0.2^{0.3}$ 和 $0.2^{0.2}$；　(2) $1.2^{0.3}$ 和 $1.2^{0.2}$；

(3) $0.3^{0.1}$ 和 $0.3^{-0.1}$；　　(4) $1.35^{0.2}$ 和 $1.35^{-0.2}$.

习题 2

学而时习之

1. 已知 $0<a<1$，$b<-1$，则函数 $y=a^x+b$ 的图象不经过（　　）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 集合 $A=\{y \mid y=2^x,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y \mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$ 为(　　)

(A) $\{2, 4\}$　(B) A　(C) B　(D) $\{(2,4),(4,16)\}$

3. 2000 年中国国内生产总值为 a，如果这以后的年平均增长率为 b，写出 x 年后国内生产总值 y 和 x 间的函数关系.

4. 设 a，b，c，d 都是不等于 1 的正数，$y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 在同一坐标系中的图象如图 2-4，则 a，b，c，d 的大小关系是__________.

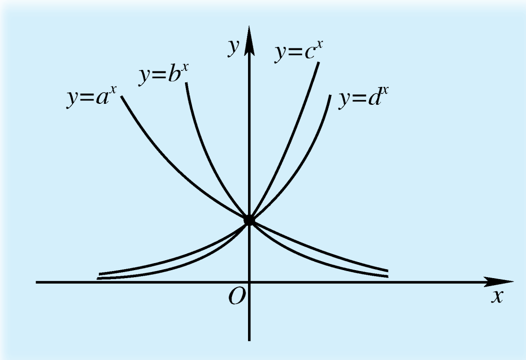


图 2-4

温故而知新

5. 用本书第37页引入的变换法证明：函数 $y=a^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称.

6. 某厂一种产品的年销售量是 a，由于其他新产品的出现，估计该产品的市场需求量每年下降 15%.

(1) 列出 x 年后年销售量 y 和 x 的函数关系；

(2) 如果年销售量降为现在的一半，该产品将不得不停止生产，问这个产品还可以生产几年？

7. 作出下列函数的图象：$y=3\cdot 3^x$；$y=2\cdot 3^x$.

阅读与思考

指数爆炸和指数衰减

一、^{14}C 测定年代

考古学家确定化石年代的一种方法是用放射性同位素作为“时钟”来测量漫长的时间，这叫作放射性同位素鉴年法.

自然界中的碳主要是^{12}C，也有少量^{14}C，它是高层大气中的原子核在太阳射来的高能粒子流的作用下产生的. ^{14}C 是具有放射性的碳同位素，能够自发地进行 β 衰变，变成氮，半衰期为 5 730 年. 活的植物通过光合作用和呼吸作用与环境交换碳元素，体内^{14}C的比例与大气中的相同. 植物枯死后，遗体内的^{14}C仍在进行衰变，不断减少，但是不再得到补充. 因此，根据放射性强度减小的情况就可以算出植物死亡的时间. ^{14}C 测年方法进入考古学研究被誉为考古学发展史上的一次革命，它将考古学研究中得到的相对年代转变为绝对年代，给考古学带来了质的飞跃，使研究更加科学化，促进了考古学研究的深入.

1986 年后，^{14}C 测年研究逐渐上升到了一个新的水平，使一般上百年的年代误差可以缩小到 30～40 年. 夏商周断代工程中^{14}C 测年技术与考古相结合，定出了武王伐商的年代范围，使原先史学界争论多年的 100 多年的可能范围缩小到 30 年，为公元前 1050—前 1020 年. 而这一年代与根据天文学研究所得到的结果不谋而合. 同时研究测定夏代系列、商前期、晚商、西周等系列，建立起了夏商周^{14}C 年代框架，为最终实现夏商周三代年表的建立提供了依据.

^{14}C 测年法主要应用以下研究领域：考古，人类学（主要对人类或动物居住地、文化层、种植作物等相关的艺术品、文物、木

炭、骨头等样品进行测定，获得相关的事件年龄），地质学（古生态学、海洋地理学、古气候学、大气化学、第四纪地质学、水文学——地下水年龄测定、天外陨石），生命科学．

我们在下面学了指数函数和对数函数的知识之后，就知道 ^{14}C 测年的具体计算方法了．

二、铀核裂变——链式反应

在铀核裂变释放出巨大能量的同时，还放出两三个中子来．

一个中子打碎一个铀核，产生能量，放出两个中子来；这两个中子又打中另外两个铀核，产生两倍的能量，再放出四个中子来，这四个中子又打中邻近的四个铀核，产生四倍的能量，再放出八个中子来……以此类推，这样的链式反应，也就是一环扣一环的反应，又称连锁反应，持续下去，宛如雪崩．

裂变过程中，假定铀 235 吸收一个中子后裂变成一个溴 85 核和一个镧 148 核的同时放出三个中子，铀 235 的质量是 235.124，溴 85 的质量是 84.938，镧 146 的质量是 147.96，中子质量是 1.009.

裂变前总质量：$235.124+1.009=236.133$.

裂变后总质量：$147.96+84.938+3.027=235.925$.

裂变过程中减少的质量是：$236.133-235.925=0.208$.

由爱因斯坦的相对论，这些损失的质量，变成了能量．由质能转换公式可以算出这一能量来，比如说，1 克铀 235 完全裂变所释放的能量相当于 2 吨优质煤完全燃烧所释放的能量，也就是说，裂变能大约比化学能大 200 万倍．

一座电功率为 100 万千瓦的火电站，一年要烧 300 万吨煤，而同样功率的核电站，只要二三十吨核燃料就够了，而且一次装料可以用上一年、两年甚至更长时间．

核反应堆还有许多其他用处．

核裂变的这种链式反应，其数学模型就是指数函数．

2.2 对数函数

2.2.1 对数的概念和运算律

一、对数的概念

我们已经知道，如果射线通过单位厚度介质时的传输系数为 a，则通过厚度为 h 的介质时的传输系数 $k=a^h$.

现在来讨论有关射线衰减的第二个问题：知道了传输系数 k，如何反过来求对应的介质的厚度 h 呢？

我们把问题抽象化为一般的数学问题：在等式

$$N=a^b\ (a>0,\ a\neq1)$$

中，知道了 N 和 a，如何求 b？

例如，已知 $8=2^h$，容易看出来 $h=3$.

但多数情形不会如此轻松. 已知 $2=10^h$，如何求 h？

已知钴 60 射线通过 1 cm 铅板时的传输系数是 0.568，要求屏蔽后的射线强度为原强度的一半（医学上叫作半价层），屏蔽铅板应该有多厚？就是已知 $0.568^h=0.5$ 求 h，更不容易计算了.

这是新的一种数学运算，叫作对数运算. 具体说来：

如果 $a^b=N$ $(a>0,\ a\neq1)$，那么 b 叫作以 a 为底，(正)数 N 的**对数**(logarithm)，记作 $b=\log_a N$. 这里，a 叫作对数的**底**(base)，N 叫作对数的**真数**(proper number).

把上述定义中的 $b=\log_a N$ 代入 $a^b=N$，得到 $a^{\log_a N}=N$；把 $N=a^b$ 代入 $b=\log_a N$，得到 $b=\log_a a^b$，这两个等式叫作对数的基本恒等式：

$$a^{\log_a N}=N,\ b=\log_a a^b.$$

由上述基本恒等式可知，$\log_a a=\log_a a^1=1$，$\log_a 1=\log_a a^0=0$.

把 $N=a^b$ 写成对数形式的等式 $b=\log_a N$，刚开始你会不适应，反应不过来. 但是对数运算实在太重要了，一定要对它习惯，要多练习，多想实际例子. 例如想到对数就是射线衰减问题中的介质厚度，

利用传输系数 k 和厚度 h 的联系，不但能确定有害射线防护屏的厚度，还可以设计出用射线测量钢板厚度的仪器.

社会生活中遇到一个复杂的问题，一时不好解决，有时就成立一个委员会或其他机构，研究处理有关的问题. 例如，精简机构办公室，计划生育办公室.

数学里对于一下子不好解决的问题，常常是先取个名字，引进一种运算或概念，定义一个函数来研究它，研究清楚了，问题就解决了.

一件事可以有两种说法.

数学里也常常用不同的形式来表述同一个事实.

$2+3=5$ 可以写成 $5-2=3$，

$3x=4y$ 可以写成 $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}$，

$y=2x+b$ 可以写成 $x=\frac{y-b}{2}$，$a^2=4$ 可以写成 $|a|=2$，$0<x<1$ 可以写成 $x\in(0,1)$.

你能举出更多的例子吗？

就是放射性元素衰变问题中的时间，就是细胞分裂过程中 1 分为 2、2 分为 4、4 分为 8 的分裂的次数．

例 1 把下列对数式改写为指数式，把指数式改写为对数式：

（1）$\log_2 32=5$；　（2）$\log_x b=2$；

（3）$\log_3 \dfrac{1}{27}=-3$；　（4）$\log_{10} 100\ 000=5$；

（5）$2^3=8$；　（6）$3^a=7$．

解 （1）$2^5=32$．　（2）$x^2=b$（$x>0$，$x\neq1$）．

（3）$3^{-3}=\dfrac{1}{27}$．　（4）$10^5=100\ 000$．

（5）$\log_2 8=3$．　（6）$\log_3 7=a$．

例 1(2)中的 $x>0$，$x\neq1$ 是哪里来的？不写上行吗？

例 2 求下列各式的值：

（1）$2^{\log_2 3}$；　（2）$2^{\log_2 3-2}$；

（3）$2^{\log_2 3+2}$；　（4）$2^{\log_2 (3-2)}$．

解 （1）$2^{\log_2 3}=3$．

（2）$2^{\log_2 3-2}=2^{\log_2 3}\cdot 2^{-2}=\dfrac{2^{\log_2 3}}{2^2}=\dfrac{3}{4}$．

（3）$2^{\log_2 3+2}=2^{\log_2 3}\cdot 2^2=3\cdot 4=12$．

（4）$2^{\log_2 (3-2)}=2^{\log_2 1}=1$．

练 习

1．把下列指数式改写为对数式，把对数式改写为指数式：

（1）$3^x=7.1$；　（2）$2.4^x=2$；　（3）$5^a=10$；

（4）$x=\log_2 3$；　（5）$a=\log_3(5+b)$；　（6）$c=\log_{\frac{1}{2}} 3$；

（7）$x=\log_6 \dfrac{1}{3}$；　（8）$10^{-\frac{1}{4}m}=6$；　（9）$\log_{a-1}(b+2)=3$；

（10）$\log_{a^2} b^3=\dfrac{1}{2}$．

2．求下列各式的值：

（1）$4^{\log_4 3}$；　（2）$2^{\log_2 3+1}$．

二、对数的运算法则

既然指数式可以写成对数式，指数的运算法则也就可以改写成对数的运算法则．由对数的定义可以推导出下面三个运算法则：

对数的运算法则中，最重要的是(1)，它刻画了对数运算的本质：化乘为加.

你能用这一条法则推导出其他法则吗？

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a M^n=n\log_a M$；

(3) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$(a>0, a\neq 1, M>0, N>0)$.

证明　(1) 设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$，那么 $a^p=M$，$a^q=N$．由指数的运算法则，有：$MN=a^p\cdot a^q=a^{p+q}$.

改写为对数形式是 $p+q=\log_a(MN)$，即 $\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$.

(2) 设 $\log_a M=p$，那么 $a^p=M$，$M^n=(a^p)^n=a^{pn}$.

改写为对数形式是 $np=\log_a M^n$，即 $\log_a M^n=n\log_a M$.

(3) 请仿照(1)写出证明过程.

这三个公式加上上面已经引入的对数基本恒等式和 $\log_a a=1$，$\log_a 1=0$，就成为对数运算的基础.

例 3　设 $a=\log_a x$，$b=\log_a y$，$c=\log_a z$，用 a，b，c 表示以下各式：

(1) $\log_a\dfrac{xy^2}{z^3}$；　　(2) $\log_a\dfrac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解　(1) $\log_a\dfrac{xy^2}{z^3}=\log_a(xy^2)-\log_a z^3$

$=\log_a x+2\log_a y-3\log_a z=a+2b-3c$.

(2) $\log_a\dfrac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=3\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a y-\dfrac{1}{3}\log_a z=3a+\dfrac{1}{2}b-\dfrac{1}{3}c$.

例 4　求值：

(1) $\log_3(9^4\cdot 3^3)$；　　(2) $\log_{10}\sqrt[3]{10\ 000}$.

解　(1) $\log_3(9^4\cdot 3^3)=\log_3(3^8\cdot 3^3)$

$$=\log_3 3^{11}=11\log_3 3=11.$$

（2）$\log_{10}\sqrt[3]{10\ 000}=\dfrac{1}{3}\log_{10}10\ 000=\dfrac{4}{3}\log_{10}10=\dfrac{4}{3}.$

例 5 求值：

（1）$\log_5 35-\log_5\left(\dfrac{1}{50}\right)-\log_5 14$；

（2）$\log_{10}12.5-\log_{10}\dfrac{5}{8}+\log_{10}\dfrac{1}{2}.$

解 利用对数运算公式合并同底数的对数.

（1）$\log_5 35-\log_5\dfrac{1}{50}-\log_5 14=\log_5\left(35\div\dfrac{1}{50}\div 14\right)=$

$\log_5\left(35\cdot 50\cdot\dfrac{1}{14}\right)=\log_5 125=\log_5 5^3=3.$

（2）$\log_{10}12.5-\log_{10}\dfrac{5}{8}+\log_{10}\dfrac{1}{2}=\log_{10}\left(\dfrac{25}{2}\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\log_{10}10=1.$

例 6 求值：$2^{\log_4 3}$.

解 $2^{\log_4 3}=(4^{\frac{1}{2}})^{\log_4 3}=4^{\frac{1}{2}\log_4 3}=4^{\log_4\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

练 习

1. 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$，$\log_a(x-y)$，$\log_a(x+y)$ 表示下列各式：

（1）$\log_a\dfrac{\sqrt{x}}{y^3z^2}$； （2）$\log_a\sqrt[5]{\dfrac{z^2}{x^2-y^2}}$；

（3）$\log_a(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{-1})$； （4）$\log_a\dfrac{x^2y}{x^2-y^2}$；

（5）$\log_a\left(\dfrac{x-y}{x+y}\cdot z\right)$； （6）$\log_a\left[\dfrac{x}{z(x+y)}\right]^4$.

2. 以下运算是否正确？如果其中有错误的，请举出反例来证明你的结论.

（1）$\dfrac{\log_a M}{\log_a N}=\log_a\dfrac{M}{N}$； （2）$\dfrac{\log_a M}{\log_a N}=\log_a(M-N)$；

（3）$\log_a M-\log_a N=\dfrac{\log_a M}{\log_a N}$.

3. 求值：（1）$4^{\log_2 3}$； （2）$3^{\log_9 2-3}$.

4. 求值：$\log_7 30-\log_7 12-\log_7\dfrac{5}{2}$.

三、常用对数和自然对数

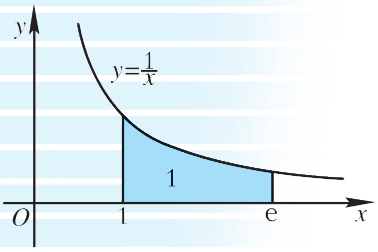
对数运算随着底的变化而变化，变化太多就不方便. 把底取定了，对计算和推理都有很大好处.

在没有电子计算机的年代，为了复杂计算的需要，引入了以 10 为底的**常用对数**(common logarithm)，并把 $\log_{10} N$ 记为 $\lg N$.

在数学研究中，有一种对数的有关解析式非常简捷方便，这种对数叫作**自然对数**(natural logarithm)，它是以无理数 $e=2.718\ 28\cdots$为底的对数，并且把 $\log_e N$ 记为 $\ln N$.

数学中第一个重要的常数是圆周率 π，第二个重要的常数就是自然对数的底 e.

画出函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象，曲线下在区间[1, e]上的这块面积恰好等于 1.



例 7 已知 $\lg 2=0.301\ 0$，估计 2^{100} 的大小.

解 设 $x=2^{100}$，等号两边同取以 10 为底的对数，得

$\lg x=\lg 2^{100}=100\lg 2=100\times 0.301\ 0=30.1$，

所以 $x=10^{30+0.1}=10^{30}\times 10^{0.1}$.

由于 $1.2<10^{0.1}<1.3$，也就是说，数 2^{100} 是一个 31 位数，大小在 1.2×10^{30} 和 1.3×10^{30} 之间. 实际上，

$$2^{100}=1\ 267\ 650\ 600\ 228\ 229\ 401\ 496\ 703\ 205\ 376.$$

这说明估计正确.

历史上引入对数是因为计算的需要. 由于对数知识已融入了高等数学的许多领域，因此，即使是有了电子计算机的今天，对数仍然是数学的一个重要运算.

练 习

设 $a=\lg 2$，$b=\lg 3$，用 a，b 分别表示：

$\lg 4$，　$\lg 5$，　$\lg 6$，　$\lg 8$，　$\lg 9$，　$\lg 12$，　$\lg 18$，　$\lg 45$.

习题 3

学而时习之

1. 已知 $f(10^x)=x$，则 $f(5)=($　　$)$

(A) 10^5　　(B) 5^{10}　　(C) $\lg 5$　　(D) $\log_5 10$

2. 已知 $11.2^a=1\ 000$，$0.011\ 2^b=1\ 000$，则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=($　　$)$

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

3. 已知 $\lg m=b-\lg n$，则 $m=$（　　）

(A) $\frac{b}{n}$　　(B) 10^{bn}　　(C) $b-10^n$　　(D) $\frac{10^b}{n}$

4. 化简：(1) $\lg \frac{1}{100}+\log_{\frac{1}{3}} 9-\log_5 125-\log_4 \frac{1}{32}$；

(2) $(\lg 5)^2+\lg 50\cdot\lg 2$；　　(3) $\frac{2\lg(\lg a^{100})}{2+\lg(\lg a)}$.

温故而知新

5. 已知 $|\lg a|=|\lg b|$，$a>0$，$b>0$，则（　　）

(A) $a=b$　　(B) $ab=\pm 1$　　(C) $a=b$ 或 $ab=1$　　(D) $ab=1$

6. 已知 $\log_a \sqrt[5]{b}=c$，那么必有（　　）

(A) $b=a^{5c}$　　(B) $b^5=ac$　　(C) $b=5a^c$　　(D) $b=c^{5a}$

7. 已知 $\log_3(a+1)=1$，求 $\log_a 2+\log_a(a-1)$.

8. 若 $\log_a 2=m$，$\log_a 3=n$，求 a^{3m+2n} 的值.

9. 如果 $\{x, xy, \lg(xy)\}=\{0, |x|, y\}$，且 $x, y\in\mathbf{R}$，那么 x，y 为多少?

10. 已知 $\lg 3=0.477\ 1$，估计 $3^{1\ 000}$ 的近似值.

2.2.2 换底公式

再回到射线衰减问题.

在等式 $k=a^h$ 中，知道了衰减比 k 要计算介质厚度 h，要会计算以 a 为底的对数，也就是 $\log_a k$.

对不同的介质，不同的射线，a 也可能不同. 难道我们要使用许多不同的对数运算才能解决问题吗？

有了换底公式，只要会计算一种对数就够用了.

在历史上，经过不懈的努力，人们建立了常用对数表和自然对数表.

现在，在计算机或计算器材中，设置两个简单的程序，就能计算常用对数和自然对数. 那么不是 10 或者 e 作为底数的对数，怎样求值？对每个底数都作出一张对数表或在计算机里存个计算程序，既不必要，也不可能. 如果能在不同底数的对数间进行转换就好了.

对数的换底公式，成功地解决了这个问题.

设 $\log_a N=b$，那么 $a^b=N$，如果 $a=c^x$，则 $c^{bx}=N$，即 $\log_c N=bx$，注意到 $b=\log_a N$，$x=\log_c a$，得到 $\log_c N=\log_a N\log_c a$，也就是

$$\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a}\quad(a>0,\ a\neq 1,\ c>0,\ c\neq 1,\ N>0).$$

这个公式叫作对数的换底公式.

最常用的对数换底公式是：$\log_a N=\dfrac{\lg N}{\lg a}$ 和 $\log_a N=\dfrac{\ln N}{\ln a}$，因为常用对数计算起来最方便，而自然对数最受数学家的青睐.

例 1 求 $\log_8\dfrac{1}{32}$ 的值.

解法一 设 $\log_8\dfrac{1}{32}=x$，则 $8^x=\dfrac{1}{32}$，$2^{3x}=2^{-5}$，所以 $x=-\dfrac{5}{3}$.

解法二 式子中的 8 和 32 都是 2 的幂.

$$\log_8\frac{1}{32}=\frac{\log_2\frac{1}{32}}{\log_2 8}=\frac{\log_2 1-\log_2 32}{\log_2 8}=\frac{-5\log_2 2}{3\log_2 2}=-\frac{5}{3}.$$

解法三 $\log_8\dfrac{1}{32}=\dfrac{\lg\frac{1}{32}}{\lg 8}=\dfrac{-5\lg 2}{3\lg 2}=-\dfrac{5}{3}$.

如果在一个国际会议上，会议代表使用的语言有 10 种，每两种语言用一个翻译，要用 45 个翻译.

实际上多少个就够了呢？

$\ln 10=\dfrac{\lg 10}{\lg e}=\dfrac{1}{\lg e}$.

例 2 求证：

(1) $\log_{a^n}b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$；　　(2) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

证明

(1) $\log_{a^n} b^m = \dfrac{\log_a b^m}{\log_a a^n} = \dfrac{m\log_a b}{n\log_a a} = \dfrac{m}{n}\log_a b$;

(2) $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$.

由例 2 (1)，有 $\log_a b = \log_{a^n} b^n$. 这个公式可以用来简化对数运算，例如，有 $\log_{\sqrt{3}} 2 = \log_3 4$（底数和真数同取平方）.

例 3 已知 $\log_4(x+2)+\log_2(x+2)^2=5$，求 x 的值.

分析 只有同底数的对数相加或相减才可以直接应用运算法则，而已知等式中的两个对数的底数不同，暂时还不能直接进行运算；但是又应注意到，这两个底数 2 和 4 之间，有着“特殊的”关系.

解
$$\begin{aligned}\log_4(x+2)+\log_2(x+2)^2 &= \log_4(x+2)+\log_4(x+2)^4\\ &= \log_4(x+2)+4\log_4(x+2)\\ &= 5\log_4(x+2)\\ &= 5,\end{aligned}$$

所以 $\log_4(x+2)=1$,

$x+2=4^1=4$,

所以 $x=2$.

经检验，$x=2$ 满足原等式.

练 习

1. 求值：(1) $\log_4 28+\log_{\frac{1}{4}} 56$；　(2) $\log_2 \dfrac{1}{25} \cdot \log_3 \dfrac{1}{8} \cdot \log_5 \dfrac{1}{9}$；

   (3) $\dfrac{\log_3 2 \cdot \log_5 7}{\log_9 \dfrac{1}{7} \cdot \log_{125} 8}$.

2. 证明：$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

3. 求值：(1) $3^{\log_9 2}$；　(2) $9^{\log_3 2}$；　(3) $4^{\log_2 3+2}$；　(4) $2^{\log_4 3-1}$.

这里用了常用对数.

再回到射线衰减问题中引进的公式 $k=a^h$. 直接使用这个公式，要用到以 a 为底的对数. 在实际工作中，人们引进了一些标准度量方法，化成常用对数或自然对数来描述射线衰减问题中的数量关系.

例 4 在有害射线的防护工作中，常常将射线通过屏蔽物的传输系数 k 换算为屏蔽效能分贝数 s，其计算公式定义为：

$$s=-20\lg k \qquad (\text{单位叫作“分贝”，记作 dB}).$$

(1) 推出根据 a 和 h 计算屏蔽效能分贝数 s 的公式；

(2) 已知铱 192 (^{192}Ir) 射线对于 1 cm 厚的一般混凝土板的传输系数 $k(1)=a=0.872$，要把这种射线的强度屏蔽掉一半，混凝土板的厚度应为多少厘米？对应的屏蔽效能是多少分贝？

解 (1) 将 $k=a^h$ 代入 s 的计算公式得到

$$s=-20\lg a^h=-20h\lg a.$$

(2) 设所求厚度为 h，对公式 $k=a^h$ 两端取对数得 $\lg k=\lg a^h=h\lg a$，解出 $h=\dfrac{\lg k}{\lg a}$，将 $k=\dfrac{1}{2}$，$a=0.872$ 代入求得混凝土板的厚度为：

$$h=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.872}=\frac{-0.3010}{-0.0595}=5.06(\text{cm}).$$

对应的屏蔽效能为

$$s=-20\lg k=-20\lg 0.5=20\times 0.3010=6.02(\text{dB}).$$

例 5 射线测厚技术原理基于公式

$$I=I_0e^{-\mu\rho t},$$

其中 I_0 和 I 分别为射线穿过被测物前后的强度，e 是自然对数的底，t 为被测物厚度，ρ 为被测物密度，μ 叫作被测物质对射线的吸收系数. 工业上常用镅 241(^{241}Am)低能 γ 射线测钢板的厚度.

已知这种射线对钢的半价层厚度为 0.8 mm，钢的密度比为 7.6，求它关于这种射线的吸收系数.

这里用了自然对数.

解 由题意可知 $k=\dfrac{I}{I_0}=0.5$，$t=0.8$ mm，$\rho=7.6$，将上述公式两端同除以 I_0 并取自然对数得

想一想，为什么两个公式里都有负号？

$$\ln k=-\mu\rho t.$$

把数据代入得到 $\ln 0.5=-\mu\times 7.6\times 0.8$，求得 $\mu=0.114\ (\text{mm})^{-1}$.

多知道一点

用概念解决问题

本节的例题中，有的用了换底公式，有的没用换底公式.

换底公式来自对数的概念，所以用好概念，也能解决问题.

例如要证明 $\log_a b\times\log_b a=1$，可以这样想：

设 $x=\log_a b$，这个等式的意思就是 $a^x=b$.

设 $y=\log_b a$，这个等式的意思就是 $b^y=a$.

把后一式子中的 b 代以 a^x，得到 $(a^x)^y=a$，即 $a^{xy}=a$，所以 $xy=1$.

同样的思路，可以推出 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$.

如果忘了换底公式，用概念可以把它找回来. 例如，要把 $\log_a 18$ 转换成自然对数，可以设 $x=\log_a 18$，这个等式是什么意思呢？就是

$$a^x=18.$$

两端取自然对数，得到 $\ln a^x=\ln 18$，即 $x\ln a=\ln 18$，$x=\dfrac{\ln 18}{\ln a}$，如此同样完成了换底.

又如上面例 3，已知 $\log_4(x+2)+\log_2(x+2)^2=5$，求 x 的值. 设 $\log_4(x+2)=u$，$\log_2(x+2)^2=v$，这两个式子的意思分别是：

$$(x+2)=4^u, \quad ①$$

$$(x+2)^2=2^v. \quad ②$$

将②式两端平方后和①式相乘得到

$$(x+2)^5=4^u(2^v)^2=4^u\cdot 4^v=4^{u+v}=4^5.$$

于是得到

$$x+2=4,\ x=2.$$

回顾一下，我们用概念解题的例子：

先有鸡或先有蛋的问题；

白马非马的问题；

花生米上的球面曲线；

用差分讨论二次函数；

用差分讨论指数函数.

……

武侠小说里的大侠，讲究练内功.

从概念出发解决问题，是数学内功.

很多有关对数的问题，可以运用基本概念化为幂指数的问题来解决. 少背公式，多用概念，是增强数学功力的要诀之一.

练 习

1. 求值：

(1) $\log_{125}25$；　(2) $\log_{64}32$；　(3) $\log_{\frac{1}{343}}\frac{1}{49}$.

2. 求值：$\dfrac{\log_7 8}{\log_{\frac{1}{49}}\frac{1}{2}}$.

3. 证明：$\log_a b=\log_{a^n}b^n$.

习题 4

学而时习之

1. 已知 $\log_8(x+1)-\log_{16}(x+1)^3=1$，求 x 的值.

2. 已知 $\log_2 3=a$，求 $\log_{12}\sqrt{54}$的值.

温故而知新

试试用概念来做这些题目！

3. 当 $0<x<1$ 时，分别比较以下两组式子的大小：

(1) $|\lg(1-x)|$ 和 $|\lg(1+x)|$；

(2) $|\log_a(1-x)|$ 和 $|\log_a(1+x)|$.（附加一个条件：不能对底数 a 进行不同情况的讨论.）

4. 用函数关系探测古墓的年代：

考古人员研究了长沙马王堆一号古墓，发现棺盖板是由杉木做成的，并且盖板所含的放射性物质^{14}C 和现代杉木的^{14}C 的比值为 76.6%.

已知放射性物质^{14}C 的半衰期为 5 730 年，并且生物体死亡后^{14}C 的含量 b 与原始含量 a 随时间的变化，满足下列的函数关系：

$$b=ae^{-ct},$$

其中 c 为常数.

问此古墓是什么时候建成的?

5. 有一种树木栽植五年后可成材. 在栽植后五年内,年增加 20%,如果不砍伐,从第六年到第十年,年增长 10%. 现在有两种砍伐方案:

甲方案是栽植五年后不砍伐,等到十年后砍伐;

乙方案是栽植五年后砍伐重栽,再过五年再砍伐一次.

请你经过计算回答:十年内用哪一个方案可以得到较多的木材?

6. 大气压强 p=力/面积,它的单位是"帕斯卡"(Pa,1 Pa=1 N/m²),已知大气压强 p(Pa) 随高度 h(m) 的变化规律是

$$p=p_0e^{-kh},$$

这里 p_0 是海平面大气压强,$k=0.000\,126$. 当地高山上一处大气压强是海平面处大气压强的 1/3,求高山上该处的海拔高度.

7. 我们都处于有声世界之中. 不同的场合,人们对音量会有不同的要求. 音量大小的单位是分贝 (dB),对于一个强度为 I 的声波,分贝的定义是:

$$\eta=10\lg\frac{I}{I_0}.$$

这里 I_0 是人耳能听到的声音的最低声波强度,$I_0=10^{-12}$ W/m²,当 $I=I_0$ 时,$\eta=0$,即 dB=0.

(1) 如果 $I=1$ W/m²,求相应的分贝值;

(2) 70 dB 时的声音强度 I 是 60 dB 时声音强度 I' 的多少倍?

阅读与思考

对数小史

在数学史上，一般认为对数的发明者是 16 世纪末到 17 世纪初的苏格兰数学家——**纳皮尔**（Napier，1550—1617）.

在纳皮尔所处的年代，**哥白尼**的“太阳中心说”开始流行，天文学成为当时的热门学科. 纳皮尔是一位天文爱好者，为了简化有关天文观测数据的计算，他多年潜心研究大数的计算技术，终于独立发明了对数.

纳皮尔首先发明了一种计算特殊多位数之间乘积的方法. 下面的表说明了这个方法的原理.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384

表中两行数字之间的关系是明确的：第一行是指数，第二行表示 2 的对应幂. 如果要计算第二行中两个数的乘积，可以通过第一行对应数字的加法来实现.

比如，计算 64×256 的值，就可以先查出第一行的对应数字：64 对应 6，256 对应 8. 然后再把第一行中的对应数字加起来：6+8=14. 第一行中的 14，对应第二行中的 16384，所以有：64×256=16 384.

$\log_2(64\cdot256)$
$=\log_2 64+\log_2 256$
$=6+8$
$=14$
$=\log_2 16\,384$,
$64\cdot256=16\,384$.

纳皮尔的这种计算方法，实际上已经体现了现代数学中“对数运算”的思想，即“化乘除为加减”的思路.

美中不足的是，表中第二行的数字跳得太快，缺少很多数字，如 3，5，7 等. 经过多年的探索，纳皮尔于 1614 年出版了他的数学名著《奇妙的对数定律说明书》，向世人公布并且解释了他的这项发明.

所以，纳皮尔是当之无愧的“对数缔造者”.

在纳皮尔发明对数之前，数学家就开始了简化计算的探索.

1471 年，德国数学家**约翰·缪勒**（Johann Muller，1436—1476）出于天文计算的需要，造出了一张具有八位数字的正弦表. 此后，余弦、正切等表也相继出现.

德国天文学家**约翰·维尔纳**（Johann Werner，1468—1528）尝试用三角中的积化和差公式来化乘为加.

作为对数的发明人，我们不应忘了另外一个名叫**别尔基**（J. Burge，1552—1632）的人，他不是数学家，但他是最先掌握对数思想的人. 1603 年，别尔基被任命为布拉格地方的宫廷钟表匠，由于工作的需要，他要利用仪器结合观察的情况作天文计算，这就促使他产生要简化计算的思想. 他花了 8 年的时间完成了他的著作《等差数列和等比数列表》，这实际上就是一种对数表. 但他的著作直到 1620 年才出版，此时纳皮尔的对数已经闻名全欧洲了.

指数和对数发展史上的关键人物还有英国数学家**布里格斯**（H. Briggs，1561—1631），他在 1616 年拜访纳皮尔，提出编造常用对数表. 在纳皮尔去世后，他以毕生的精力，继承纳皮尔未竟的事业，在 1624 年出版了《对数算术》一书，载有 1～20 000 及 90 000～100 000的 14 位对数表，这在当时是需要花费巨大精力的工作. 1628 年，由荷兰数学家**佛拉格**（A. Vlacq，1600 —1667）把余下的 20 000～90 000 的常用的对数补全，这是流行最广的对数表.

法国哲学家、数学家、物理学家**笛卡儿**（R. Descartes，1596 —1650）于 1637 年开始用符号 a^n 表示正整数幂，即 n 个 a 的连乘. 幂的记号经过多人的工作，扩展到分数指数幂，负指数幂，直到 18 世纪初，英国数学家**牛顿**（I. Newton，1643 —1727）开始用 a^x 表示任意实数指数幂.

欧拉（L. Euler，1707—1783）在 18 世纪发现对数与指数间的联系，他指出“对数源出于指数”，这个见解很快被人们所接受.

恩格斯在他的著作《自然辩证法》中，曾经把笛卡儿的坐标、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分称为 17 世纪的三大数学发明. 法国著名的数学家、天文学家**拉普拉斯**(Pierre Simon Laplace，1749—1827)曾说：对数可以缩短计算时间，“在实效上等于把天文学家的寿命延长了一倍”. 其实，从数学的角度看，对数产生的意义就更为深远了，伽利略甚至说：“给我一个空间、时间及对数，我即可创造一个宇宙.”

2.2.3 对数函数的图象和性质

一、对数函数是指数函数的反函数

射线衰减问题中，屏蔽物的厚度 x 和传输系数 y 的对应关系是函数关系 $y=a^x$，由厚度 x 可以确定传输系数 y. 反过来，$x=\log_a y$，厚度 x 也可以看成是传输系数 y 的函数.

我们习惯了用 x 代表自变量，用 y 代表函数值. 实际上，字母的改变并不影响函数所刻画的对应关系. $x=\log_a y$ 和 $U=\log_a T$ 表示的是同一个函数，都是以 a 为底的对数函数.

这两个函数描述的对应关系其实是一回事，只是自变量和函数值换了一个位置，我们说它们两个互为**反函数**(inverse function).

为了保持用 x 表示自变量的习惯，自变量和函数值换位置的时候就把 x 和 y 也对调一下.

一般说来，把由对数运算确定的函数

$$y=\log_a x \quad (x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$$

叫作(以 a 为底的)**对数函数**(logarithmic function)，它是（以 a 为底的）指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 当然，指数函数 $y=a^x$ 也是对数函数 $y=\log_a x$ 的反函数. 这时，指数函数 $y=a^x$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 成了对数函数 $y=\log_a x$ 的值域；而指数函数 $y=a^x$ 的值域，却成了对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域.

要找寻函数 $y=f(x)$ 的反函数，可以先把 x 和 y 换位，写成 $x=f(y)$，再把 y 解出来，表示成 $y=g(x)$ 的形式. 如果这种形式是唯一确定的，就得到了 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$. 既然 $y=g(x)$ 是从 $x=f(y)$ 解出来的，必有 $f(g(x))=x$，这个等式也可以作为反函数的定义.

例 1 求下列函数的反函数：

(1) $y=2x-5$；　(2) $y=\dfrac{x}{1-x}$；　(3) $y=1+e^{\frac{x}{2}}$.

解 (1) 从 $x=2y-5$ 中解得 $y=\dfrac{x+5}{2}$，即为所求；

(2) 从 $x=\dfrac{y}{1-y}$ 中解得 $y=\dfrac{x}{x+1}$，即为所求；

(3) 从 $x=1+e^{\frac{y}{2}}$ 移项得 $x-1=e^{\frac{y}{2}}$. 两端取自然对数得到

$\ln(x-1)=\frac{y}{2}$，解得 $y=2\ln(x-1)$，即为所求.

要注意的是，并不是所有的函数都有反函数.

二、反函数的图象

图 2-5 是上例(3)小题中的函数和它的反函数的图象.

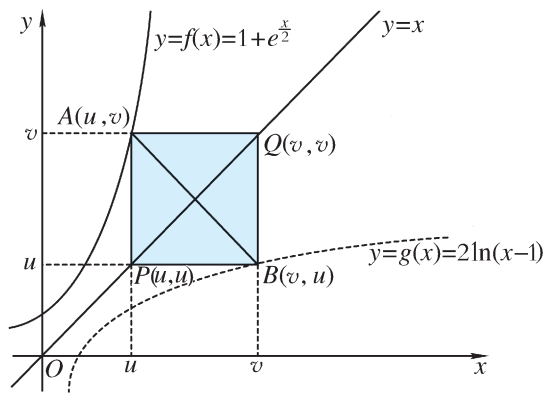


图 2-5

从图上看，两条曲线关于直线 $y=x$ 轴对称.

一般地，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，则它们的图象关于直线 $y=x$ 轴对称. 两者中一个递增另一个也递增，一个递减另一个也递减.

注意，偶函数说的是一个函数，它的图象是轴对称图形.

互为反函数的两个函数图象的对称，是两个图形关于一条直线的轴对称.

三、对数函数的图象和性质

因为对数函数是指数函数的反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 轴对称，所以将指数函数的图象以直线 $y=x$ 为对称轴作反射，就得到对数函数的图象（如图 2-6）. 由指数函数的增减性，也得到对数函数的增减性. 温故知新，列表如下：

	指数函数 $y=a^x$	对数函数 $y=\log_a x$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
图形经过点	$(0, 1)$	$(1, 0)$
增减性	当 $a>1$ 递增；$0<a<1$ 时递减	当 $a>1$ 递增；$0<a<1$ 时递减

由对数的运算法则，对数函数 $y=f(x)$ 满足 $f(uv)=f(u)+f(v)$. 反过来，满足这个关系的不恒为 0 的单调函数，一定是对数函数.

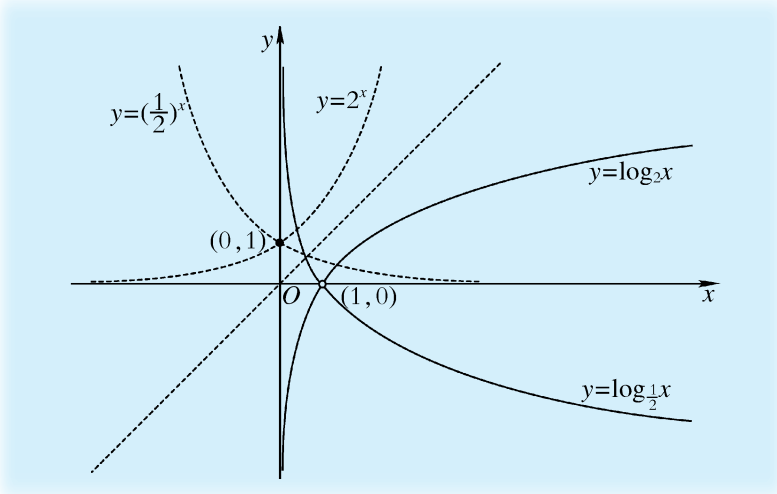


图 2-6

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{0.5}(3-x)$； (2) $y=\log_2(x^2-2x-3)$.

解 (1) $3-x>0$，$x<3$，即函数定义域是 $(-\infty, 3)$.

(2) $x^2-2x-3>0$，得 $x<-1$ 或 $x>3$.

即 函数定义域是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

例 3 比较以下各组数的大小：

(1) $\log_2 7.6$ 和 $\log_2 8.7$； (2) $\log_{\frac{1}{2}} 7.6$ 和 $\log_{\frac{1}{2}} 8.7$；

(3) $\log_a 7.6$ 和 $\log_a 8.7$； (4) $\log_{0.8} 2$ 和 $2^{0.8}$.

解 (1) 函数 $y=\log_2 x$ 是增函数，即 $\log_2 7.6<\log_2 8.7$.

(2) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 是减函数，即 $\log_{\frac{1}{2}} 7.6>\log_{\frac{1}{2}} 8.7$.

(3) 当 $a>1$ 时函数 $y=\log_a x$ 是增函数，$\log_a 7.6<\log_a 8.7$；当 $0<a<1$时函数 $y=\log_a x$ 是减函数，$\log_a 7.6>\log_a 8.7$.

(4) $\log_{0.8} 2<\log_{0.8} 1=0<2^{0.8}$.

练 习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt[3]{\log_a x}$； (2) $y=\sqrt{\log_{0.2}(5x-4)}$.

2. 已知 $\log_a m<\log_a n$，在下列条件下，分别比较两数 m 和 n 的大小：

(1) $a=2$； (2) $a=\frac{1}{2}$； (3) $a>1$； (4) $0<a<1$.

习题 5

学而时习之

1. 已知 $f(x)=\frac{2}{x^2}+\lg(x+\sqrt{x^2+1})$，又 $f(-1)=1.62$，则 $f(1)=$(　　)

(A) 0.38　　(B) 1.62　　(C) 2.38　　(D) 2.62

2. 已知 $1<x<2$，$a=(\log_2 x)^2$，$b=\log_2 x^2$，$c=\log_2(\log_2 x)$，则(　　)

(A) $a<b<c$　　(B) $a<c<b$　　(C) $c<b<a$　　(D) $c<a<b$

3. $f(x)=|\log_a x|(0<a<1)$，$m=f\left(\frac{1}{3}\right)$，$n=f(2)$，$p=f\left(\frac{1}{4}\right)$，则 m，n，p 从小到大的顺序是____________.

温故而知新

4. 已知 $f(x)$是对数函数，且 $f(\sqrt{3}+1)+f(\sqrt{3}-1)=\frac{1}{2}$.

求 $f(\sqrt{17}+1)+f(\sqrt{17}-1)$ 的值.

5. 方程 $x^2+(\lg 7+\lg 5)x+\lg 7\cdot\lg 5=0$ 的两根是 $\lg\alpha$，$\lg\beta$，求 $\alpha\beta$ 的值.

6. 若 $\lg x+\lg y=2\lg(x-2y)$，求 $\log_{\sqrt{2}}\frac{x}{y}$ 的值.

7. 若 $\log_a\frac{3}{5}<1$，求常数 a 的取值范围.

8. 设$\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 8$，求函数 $y=\log_2\frac{x}{2}\cdot\log_2\frac{x}{4}$的最值.

9.* 设 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+2y=\frac{1}{2}$，求 $a=\log_{\frac{1}{2}}(8xy+4y^2+1)$的最大值.

10. (1) 已知 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 a)]=0$，求 a 的值；

(2) 已知 $\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 b)]=0$，求 b 的值；

(3) 比较 a，b 的大小.

2.3 幂函数

2.3.1 幂函数的概念

一、正整数次的幂函数

大雾天，海陆空的交通运输都受到影响.

雾是大量小水滴在空气中悬浮而形成的. 小水滴为什么不掉下来呢？自然是因为它小，水滴大到一定程度肯定会掉下来，就是下雨.

小就不受地心引力了吗？同样高度下落的 1 kg 重的球和 5 kg 重的球，不是同时落地吗？

其实，要想看见一片羽毛和一枚硬币同时落地，就得在真空的玻璃管里进行实验. 而空气中的小水滴，由于太小，而空气阻力又不能忽略，因此掉不下来.

大水滴受到的空气阻力更大，为什么反而能掉下来呢？

我们近似地把水滴看成小球，用球的直径 x 来刻画它的大小. 当 x 变小时，水滴所受的重力和空气阻力都在变小，但程度不同.

水滴所受的重力和质量成正比，也就是和体积成正比，和 x^3 成正比；但它所受的空气阻力却和表面积成正比，即和 x^2 成正比.

这样一来，当直径 x 从 1 mm 变小到 0.1 mm 时，水滴所受的重力减小到 1‰，而阻力减小到 1%. 相对来说，阻力与重力的比值增加到 10 倍. 同理，x 从 1 mm 变小到 0.01 mm 时，阻力与重力的比值增加到 100 倍. 随着直径 x 的变小，水滴所受的重力比起阻力来，很快就变得微不足道了. 这就是小水滴成雾的原因.

上面的讨论中用到的变量 x，x^2 和 x^3，都可以看成自变量 x 的函数. 这三种函数我们已经很熟悉了.

一般来说，当 x 为自变量而 α 为非 0 实数时，函数 $y=x^\alpha$ 叫作（α 次的）**幂函数**（power function）. 上面用到的 1，2，3 次幂函数，都是正整数次幂函数 $y=x^n$（$x\in\mathbf{R}$，n 是正整数）的例子.

棱长为 10 的立方体，表面积为 600，体积是 1 000，表面积与体积的比为 0.6；棱长为 1 时，这个比值成为 6. 棱长为 0.1 呢？

两个彼此相似的图形，对应部分的长度之比等于相似比，对应部分的面积之比等于相似比的平方，对应部分的体积之比等于相似比的立方. 这叫作相似比原理，它在自然界发挥着十分重要的作用.

函数 $y=x^n$（$x\in[0,+\infty)$）有没有反函数？如果有，它的反函数是不是幂函数？

二、分数次的幂函数

空气中悬浮的微粒当然随空气的流动而流动，但即使没有风，它们也在空气中做无规则的运动．虽然每个微粒的运动都是无规则的，但从总体上看，也有统计上的规律．这好比醉汉走路，他从一个灯柱下爬起来，在广场上漫步，前后左右找不到方向，走了 100 步时，实际上离灯柱有多远呢？用统计学的知识可以推出，醉汉离开灯柱的平均距离，大致是 10 步．一般说来，清醒时方向不变能走 x m 的距离，醉酒时按同样速度同样时间平均起来只能走$\sqrt{x}$ m．

类似地，微粒在不流动的空气中扩散的速度，与时间的平方根成正比，这是缓慢地运动．工业生产过程排放的烟尘，在没有风的日子，会长时间笼罩在一片地方的上空，更加危害当地居民的健康．

上面用到的变量$\sqrt{x}$，是最常用到的分数次幂函数．一般说来，我们只考虑定义域为 $[0, +\infty)$ 的分数次幂函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$，这里 p 是不为 0 的整数，q 是大于 1 的正整数，并且 p 和 q 互素．

想一想，我们用过哪些分数次的幂函数？

三、负整数次的幂函数

正整数次幂函数的倒数 $y=\dfrac{1}{x^n}$，叫作负整数次的幂函数．一般写成 $y=x^{-n}$，这里 n 是正整数，$x\neq 0$．

我们学过的倒数函数 $y=\dfrac{1}{x}$，以及平方倒数函数$\dfrac{1}{x^2}$，都是最常用的负整数次的幂函数．

前面讨论过射线穿过介质时衰减的问题．其实，从点射线源发出的射线，即使没有介质的屏蔽，其强度也会随到达位置与射线源的距离 x 的增大而变弱．具体来说，到达位置测到的强度与 x^2 成反比．

根据万有引力定律，与地心距离为 x 的物体所受的重力的大小，与 x^2 成反比．这是宇宙飞行技术的最基本的理论根据．

负整数次的幂函数和正整数次的幂函数，统称为整数次的幂

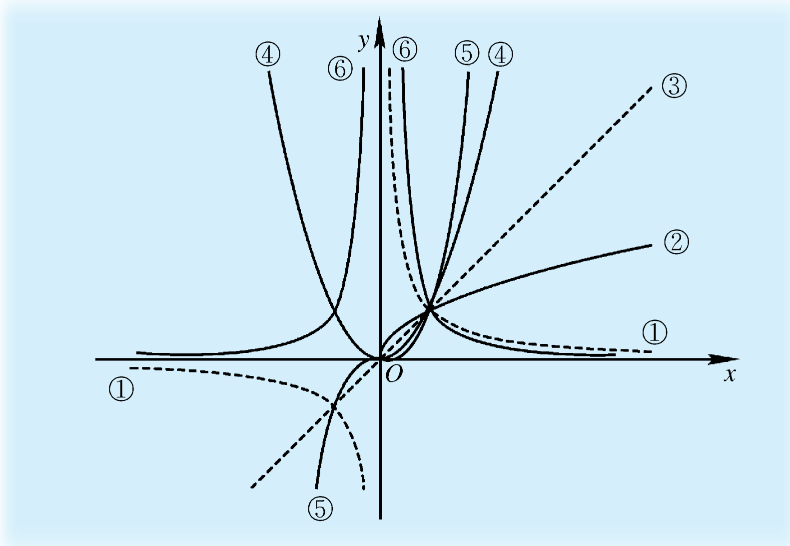


图 2-7

函数.

上面提到了 6 个幂函数：

$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，

$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{1}{x^2}$.

它们代表了幂函数的各种不同类型.

图 2 - 7 是这 6 个幂函数的图象.

作为练习，请给上图的曲线标出对应的函数解析式. 想一想，它们当中哪些是偶函数？哪些是奇函数？

对于一般的非 0 实数 α，幂函数 $y=x^\alpha$ 只在 $x>0$ 时才能都有意义. 对于整数次的幂函数，由于图象的对称性，把它们在 $(0, +\infty)$ 上的图象和性质说清楚了，其他部分的情形也就很容易了解. 所以，我们后面着重研究幂函数 $y=x^\alpha$ 在 $x>0$ 时的图象和性质.

注意到当 $x>0$ 时，有等式 $x^\alpha=(e^{\ln x})^\alpha=e^{\alpha\ln x}$，可见幂函数的性质都可以归结到指数函数和对数函数的性质. 例如，由 e^x 和 $\ln x$ 的递增性立刻得知：$\alpha>0$ 时，x^α 递增；$\alpha<0$ 时，x^α 递减. 由 e^x 恒为正可知 $x>0$ 时，$x^\alpha>0$.

这 6 个幂函数，各有什么特色？

它们有没有共同之点？

想一想：

在等式 $A=B^C$ 中，取定一个字母为常量，另外两个设置为自变量 x 和函数值 y，这样一共能够得到几类函数？都是哪些函数？

练 习

请你给图2-7中的6个图象分别“对号入座”.

(1) 写出函数解析式;

(2) 哪几个是偶函数,哪几个是奇函数?

(3) 写出每个函数的定义域、值域;

(4) 写出每个函数的单调区间.

习题 6

学而时习之

1. 请你再仔细观察图2-7,然后填写下面的空白. 对幂函数 $y=x^{\alpha}$,

(1) 当 $\alpha>1$, $x\geqslant 0$ 时,图象恒过____和____两点;其中当 $0<x<1$ 时,幂函数图象在$y=x$ 图象的____方;当 $x>1$ 时,幂函数图象在 $y=x$ 图象的____方.

(2) 当 $0<\alpha<1$, $x\geqslant 0$ 时,图象也恒过____和____两点;其中当 $0<x<1$ 时,幂函数图象在 $y=x$ 图象的____方;当 $x>1$ 时,幂函数图象在 $y=x$ 图象的____方.

(3) 当 $\alpha<0$, $x>0$ 时,图象恒过点____.

温故而知新

2. 把水滴近似地看成半径为 r 的小球. 设水滴所受重力为 ar^3,所受空气阻力为 br^2,当 r 小到什么程度时,阻力能够抵消重力?(实际上,阻力和速度的大小还有关系,这里是简化了的模型.)

2.3.2 幂函数的图象和性质

定义在非负数范围内的幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域只有两种可能：当 $\alpha>0$ 时是 $[0,+\infty)$，当 $\alpha<0$ 时是 $(0,+\infty)$.

幂函数的图象，可以分两种情况讨论.

1. $\alpha>0$.

我们已经作过函数 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$的图象，这里再作 $y=x^3$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$的图象，如图 2-8. 因为 $y=x^3$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$互为反函数，列一个表就能画两个图象.

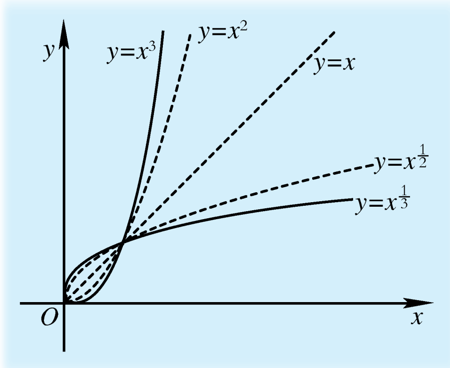


图 2-8

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
x^3	0	0.13	1	3.38	8	15.63	27

幂函数 $y=f(x)$有如下性质：

$f(uv)=f(u)\cdot f(v)$，

如果有不恒为 0 的函数满足上述关系，那么，令 $v=1$，有：

$f(u)=f(u\cdot 1)=f(u)\cdot f(1)$

所以 $f(1)=1$.

从这四个函数在区间 $[0,+\infty)$ 上的图象可以归纳得到，当 $\alpha>0$ 时，幂函数在区间$[0,+\infty)$上有如下性质：

(1) 都经过两个点$(0,0)$和$(1,1)$，即 $0^\alpha=0$，$1^\alpha=1$；

(2) 是递增函数；

(3) 幂函数 $y=x^\alpha$ 与直线 $y=x$ 有如下关系：

	$0<x<1$	$x>1$
$\alpha>1$	在 $y=x$ 的下方	在 $y=x$ 的上方
$0<\alpha<1$	在 $y=x$ 的上方	在 $y=x$ 的下方

2. $\alpha<0$.

我们已经作过函数 $y=x^{-1}$在区间 $(0,+\infty)$ 上的图象，这里再作出函数 $y=x^{-2}$和 $y=x^{-\frac{1}{2}}$在区间 $(0,+\infty)$ 上的图象.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
x^{-2}	16	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16
$x^{-\frac{1}{2}}$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

如图 2-9.

从这些图象可以得到，当 $\alpha<0$ 时，幂函数在区间$(0,+\infty)$上有如下性质：

(1) 图象都过点$(1,1)$,即 $1^{\alpha}=1$；

(2) 是递减函数；

(3) 图象向上与 y 轴正向无限接近，向右与 x 轴正向无限接近.

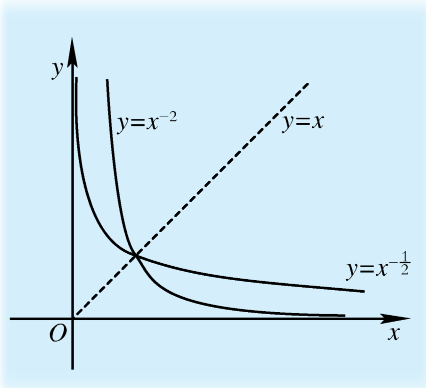


图 2-9

例 1 比较各组数的大小：

(1) $1.5^{1.4}$和 $1.6^{1.4}$；　　(2) $1.5^{0.4}$和 $1.6^{0.4}$.

解 两题中幂指数分别等于 1.4 和 0.4，都是大于 0 的，而在区间$[0,+\infty)$上函数 $y=x^{1.4}$和 $y=x^{0.4}$都是递增函数.

由于 $1.5<1.6$,

所以 (1) $1.5^{1.4}<1.6^{1.4}$；　(2) $1.5^{0.4}<1.6^{0.4}$.

例 2 比较下列各组数的大小：

(1) $1.5^{-1.5}$和 $1.6^{-1.5}$；　　(2) $1.5^{-0.6}$和 $1.6^{-0.6}$.

解 两个幂函数 $y=x^{-1.5}$与 $y=x^{-0.6}$在$(0,+\infty)$上都是递减函数.

由于 $1.5<1.6$,

所以 $1.5^{-1.5}>1.6^{-1.5}$；$1.5^{-0.6}>1.6^{-0.6}$.

练 习

1. 在同一坐标系上分别作出下列幂函数的图象：

(1) $y=x^3$ $(x\geqslant 0)$；　　(2) $y=x$ $(x\geqslant 0)$；

(3) $y=x^{\frac{1}{2}}$ $(x\geqslant 0)$；　　(4) $y=x^{-2}$ $(x\geqslant 0)$.

2. 比较下面各组数的大小：

(1) $3.5^{1.7}$ 和 $3.4^{1.7}$；　　(2) $3.5^{0.3}$ 和 $3.4^{0.3}$；

(3) $3.5^{-1.6}$ 和 $3.4^{-1.6}$；　　(4) $3.5^{-0.3}$ 和 $3.4^{-0.3}$.

3. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(8,\dfrac{1}{2}\right)$，求 $f\left(\dfrac{1}{512}\right)$ 的值.

习题 7

学而时习之

1. $f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^{\frac{2}{5}}$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$？

2. 已知 $f(x)=x+\sqrt{x}$，$g(x)=x-\sqrt{x}$，分别求出这两个函数的最小值.

温故而知新

3. 读下面的“多知道一点”后填写下表：

函数	定义域	值域	函数	定义域	值域	函数	定义域	值域
$y=x^{\frac{4}{3}}$			$y=x^{\frac{3}{2}}$			$y=x^{\frac{5}{3}}$		
$y=x^{\frac{2}{3}}$			$y=x^{\frac{1}{2}}$			$y=x^{\frac{1}{3}}$		
$y=x^{-\frac{2}{3}}$			$y=x^{-\frac{3}{2}}$			$y=x^{-\frac{5}{3}}$		

4. 求函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的最大值.

多知道一点

负数有时也有有理指数幂

把有理数写成分数形式 $\alpha=\dfrac{q}{p}$ 时，规定 q 是整数，p 是非 0 的自

然数，再规定当 $q\neq 0$ 时 p 和 q 必须互素（也就是不可再约分），在这样的条件下，有理指数幂函数可以写成 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 的形式.

有了分数的分子和分母不可约的规定，那么我们就可以把有理指数幂函数的定义范围扩大到负数了.

例 我们已经知道：$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称.

（1）在同一坐标系中分别作出函数 $f(x)=x^{\frac{4}{3}}(x\geqslant 0)$ 和 $y=f(-x)(x\leqslant 0)$ 的图象；

（2）在同一坐标系中分别作出函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x\geqslant 0)$ 和 $y=-f(-x)(x\leqslant 0)$ 的图象；

（3）你能不能作出幂函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象？

（这些图象只要求大致走向正确，能体现出它们的主要性质，不要求精确.）

解 （1）我们已经知道，函数 $f(x)=x^{\frac{4}{3}}(x\geqslant 0)$ 和 $y=f(-x)(x\leqslant 0)$ 的图象关于 y 轴对称，因此这两个函数的大致图象如图 2－10 所示.

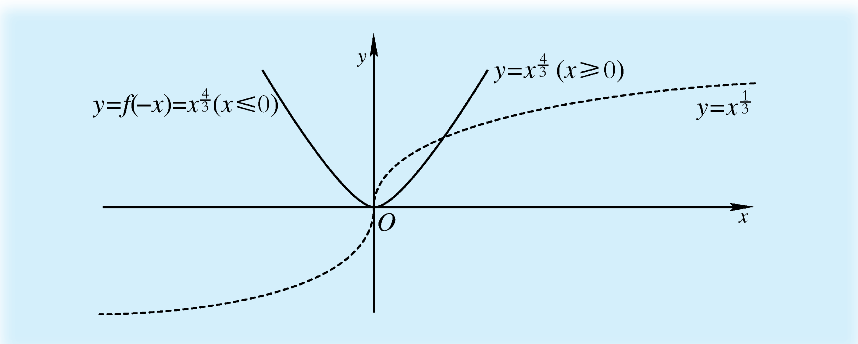


图 2-10

（2）我们还知道，函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x\geqslant 0)$ 和 $y=-f(-x)(x\leqslant 0)$ 的图象关于原点对称，这两个函数的大致图象也如图 2-10 所示.

（3）如 $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$，则 $f(-x)=(-x)^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{(-x)^4}=\sqrt[3]{x^4}=x^{\frac{4}{3}}$；

如 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则 $-f(-x)=-(-x)^{\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{-x}=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

幂函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 请同学们自己从图 2-10 中去找.

请特别注意“p 和 q 必须互素”这一条，没有这一条，对负数的有理指数幂将会出现矛盾的结论．例如：$(-2)^{\frac{2}{4}}$ 按照底数是正数时的约定应理解为 $\sqrt[4]{(-2)^2}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$，但是，按照另一种运算法，又有 $(-2)^{\frac{2}{4}}=(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$，这个数在实数范围内并不存在．这里的原因就是因为幂指数 $\frac{2}{4}$ 是可约的.

2.4 函数与方程

2.4.1 方程的根与函数的零点

一、实系数一元二次方程的根

给定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$ 且 a，b，$c\in\mathbf{R}$），它的判别式是 $\Delta=b^2-4ac$，我们在初中学到：

（1）当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根；

（2）当 $\Delta=0$ 时，方程有两个重根，即 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

（3）当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不等实根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

必须指出，只有在 $\Delta\geqslant 0$ 的条件下，才能保证两根 x_1 和 x_2 都是实根.

$\Delta\geqslant 0$ 时，把(2)(3)综合起来就是一元二次方程的求根公式.

从另一方面看，考虑联立方程：

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c, \\ y=0, \end{cases}$$

消去 y 得一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\Delta>0$ 时，这一方程有两个根 $x=x_1$ 和 $x=x_2$，那么，方程组有两组解

$$\begin{cases} x=x_1, \\ y=0, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x=x_2, \\ y=0. \end{cases}$$

这正是曲线（二次函数图象）$y=ax^2+bx+c$ 和 x 轴的两个交点的坐标.

当 $\Delta=0$ 时方程组只有一组解，这组解正是曲线和 x 轴公共点的坐标. 因此，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 如果有实根，那么这些根正好是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和 x 轴的公共点的横坐标.

当 $\Delta<0$ 时，方程无解，这时二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与

x 轴没有公共点.

例 1 方程 $x^2-5x+m=0$ 的两个实根都大于 1，求实数 m 的变化范围.

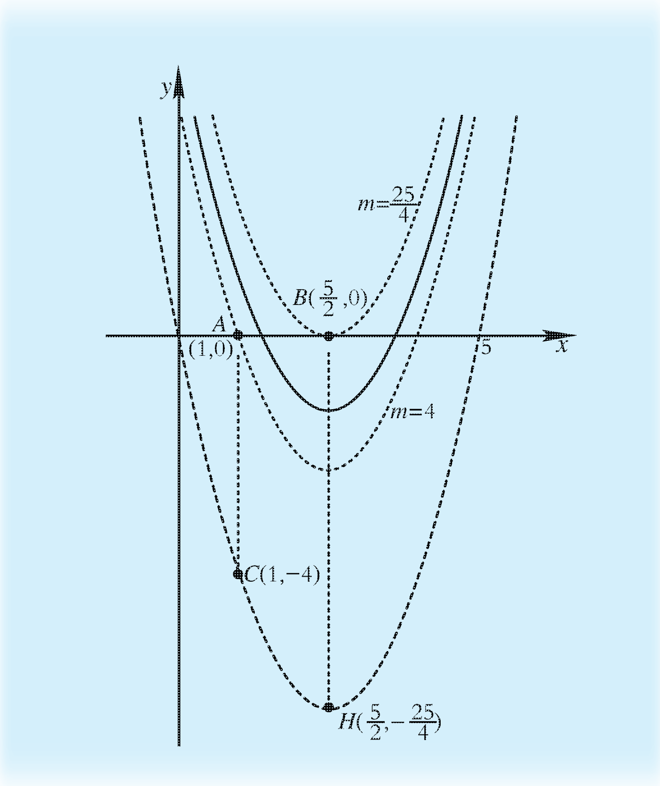


图 2-11

两根都大于 1，小根当然也大于 1，反过来，小根大于 1，那么另一根当然更大于 1.

解 图 2-11 中的粗虚线画出了函数 $y=x^2-5x$ 的图象，即 $m=0$ 时函数 $y=x^2-5x+m$ 的图象. 当 m 增大时，图象向上平移，它和 x 轴的两交点逐渐向点 $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 靠拢，当平移距离等于线段 AC 长度时，即 $m=4$ 时，左边的交点到达点 $A(1, 0)$，对应的方程 $x^2-5x+m=0$ 的两个实根中较小的一个等于 1. 当 m 继续增加，即曲线继续向上平移时，两个实根都会大于 1. 但当 m 大于线段 HB 长度$\frac{25}{4}$时，曲线平移到了 x 轴上方，和 x 轴不再相交，方程 $x^2-5x+m=0$ 也就没有实根了. 由此可得结论：当且仅当 $m\in\left(4, \frac{25}{4}\right]$时，方程的两个实根都大于 1.

上述解题的过程，显示出把二次方程的根和二次函数曲线与 y 轴

交点联系起来的好处．这样看问题一目了然，从概念出发就能找到答案．当然，这种方法的适用范围不限于二次方程．

二、函数的零点

方程 $f(x)=0$ 的根又叫作函数 $y=f(x)$ 的"零点"．

一个方程 $f(x)=g(x)$ 的解也可以看作两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的公共点的横坐标，从这个角度出发，我们可以从图象来观察方程解的个数和分布情况．

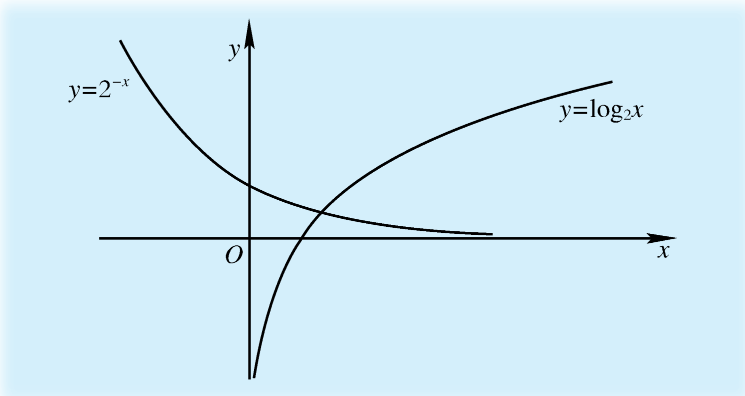


图 2-12

例 2 讨论方程 $2^{-x}=\log_2 x$ 解的个数和分布情况．

解 考察方程 $2^{-x}=\log_2 x$ 的解，只要从同一坐标系内，观察函数 $y=2^{-x}$ 和 $y=\log_2 x$ 的公共点（如图 2-12）就可以知道，方程有且只有一个解，此解在区间 $(1,2)$ 上．

练　习

x_1，x_2 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，试写出以下各种情况的等价条件：

（1）两实根都大于 3；

（2）两实根都小于 -2；

（3）两实根都在区间 $(-1,3)$ 上；

（4）一实根在区间 $(-2,1)$ 上，另一实根在区间 $(2,3)$ 上．

习题 8

学而时习之

1. 证明函数 $y=\dfrac{2x-5}{x^2+1}$在区间(2，3)上至少有一个零点.

2. 试找出一个长度为 1 的区间，在这个区间上，函数 $y=\dfrac{x-1}{3x+2}$至少有一个零点.

3. 用观察图象法判定方程 $\log_2 x=-(x-1)^2+2$ 的解的个数.

温故而知新

4. 方程 $x^2-(m-1)x+2m=0$ 有两个实根，试写出以下各种情况的等价条件：

(1) 两实根都小于 1；

(2) 一根为 0；

(3) 一根大于 1，一根小于 1；

(4) 在区间(0，1)上有且只有一个根.

2.4.2 计算函数零点的二分法

一、如何查找线路

在一个风雨交加的夜里，从某水库闸房到防洪指挥部的电话线路发生了故障．这是一条 10 km 长的线路，如何迅速查出故障所在？

如果沿着线路一小段一小段查找，困难很多．每查一个点要爬一次电线杆子，10 km 长，大约有 200 多根电线杆子呢．

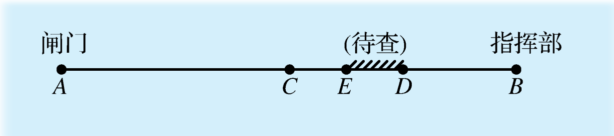


图 2-13

想一想，维修线路的工人师傅怎样工作最合理？

如图 2-13，他首先从中点 C 查．用随身带的话机向两端测试时，发现 AC 段正常，断定故障在 BC 段；再到 BC 段中点 D 测试，这次发现 BD 段正常，可见故障在 CD 段；再到 CD 中点 E 来查……

每查一次，可以把待查的线路长度缩减一半，算一算，要把故障可能发生的范围缩小到 50～100 m 左右，即一两根电线杆附近，要查多少次？

只要 7 次就够了．

这种检查线路故障的方法，叫二分法，也叫对分法．二分法不仅可用于查找电路、水管、气管故障，还能用于实验设计、资料查询，它还是方程求根的常用方法．

二、求函数零点(方程的根)近似值的二分法

设函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续的曲线，如果在区间 $[a, b]$ 的左端 a 处曲线在 x 轴上方，而在 b 处曲线在 x 轴下方，可以断定，曲线一定会和 x 轴在 (a, b) 内的某点处相交，如图 2-14．也就是说，当 x 从 a 到 b 逐渐增加时，如果 $f(x)$ 连续变化而且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 符号相反，则方程 $f(x)=0$ 在 (a, b) 内至少有一个根．

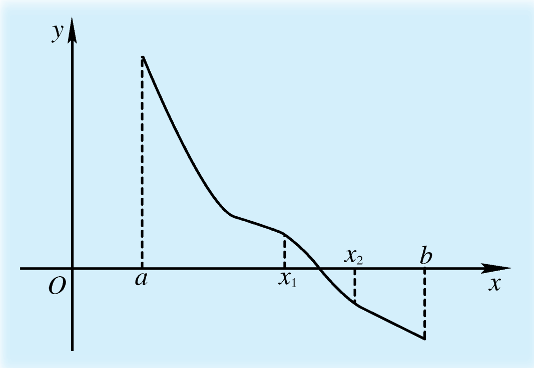


图 2-14

我们可以取 $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ 作为根的第一个近似值.

检查 $f(x_1)$ 的正负.

如果 $f(x_1)=0$，那么我们已经在区间 $[a,b]$ 上找到了方程的一个根；

如果 $f(x_1)\neq0$，因为函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 两个端点的函数值异号，不论 $f(x_1)$ 是正是负，它总与 $f(a)$ 或 $f(b)$ 中的一个异号，例如 $f(b)$，这样，方程 $f(x)=0$ 在区间 $[x_1,b]$ 上至少有一个根，因此，可以取 $x_2=\dfrac{x_1+b}{2}=\dfrac{a+3b}{4}$ 作为方程根的第二个近似值，把区间 $[x_1,b]$ 记作 $[a_1,b_1]$，它的长度是区间 $[a,b]$ 长度的一半.

如此反复地做下去，可以得到一系列有限区间 $[a,b]$，$[a_1,b_1]$，$[a_2,b_2]$，$[a_3,b_3]$，…其中每个区间的长度都是它前一个区间长度的一半，这样就可以得到方程 $f(x)=0$ 的根的越来越精确的近似值.

练习

使用计算器或计算机，用二分法计算方程 $x^3-x-1=0$ 在区间 $[1.320\,4,1.328\,2]$ 上的根的近似值，精确到小数点后第 3 位.

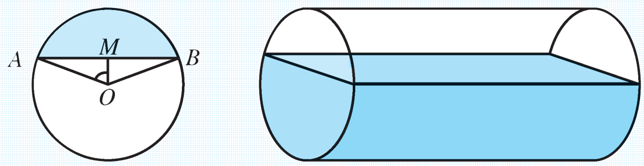
习题 9

用二分法求方程 $x^3-3x-1=0$ 在区间 $[1.8,1.9]$ 上的解，要求精确到小数点后第 3 位.

数学实验

用二分法求方程的近似解

有这么一个实际问题：轴线水平放置的直径 2 m 的圆柱形储油罐，当储油量为油罐容积的$\frac{2}{3}$时，油的深度是多少(图 2-15 (b))?



(a) (b)

图 2-15

问题可以化为更一般的数学问题：弦 AB 把半径为 R 的圆分成两块，要使较小的一块是圆面积的$\frac{1}{a}$，如何确定弦 AB 到圆心的距离？见图 2-15(a).

设 AB 的中点为 M，$\angle AOM=k^\circ$，则弦 AB 到圆心的距离 $OM=R\cos k^\circ$.

这时，扇形 OAB 的面积是$\frac{k\pi R^2}{180}$，而$\triangle OAB$ 的面积是 $R^2\sin k^\circ\cdot\cos k^\circ$，于是，问题化为求满足下列等式的数 k：

$$\frac{k\pi R^2}{180}-R^2\sin k^\circ\cos k^\circ=\frac{\pi R^2}{a},$$

化简后得到关于未知数 k 的方程：

$$F(k,a)=\pi+a\sin k^\circ\cos k^\circ-\frac{ak\pi}{180}=0.$$

下面根据实际问题取 $a=3$，记 $f(k)=F(k,3)$，得到方程

$$f(k)=\pi+3\sin k^\circ\cos k^\circ-\frac{k\pi}{60}=0.$$

设方程的解为 k^*，以下分三步进行.

第一步，确定 k^* 的大致范围：

取 $k=60$，得 $f(60)=1.299\cdots>0$；

取 $k=90$，得 $f(90)=-1.57\cdots<0$；可见 $k^*\in(60,90)$.

第二步，作二分法迭代计算：

取 $k_1=\dfrac{60+90}{2}=75$ 为 k^* 的初步近似值，得

$$f(k_1)=f(75)=-0.035\cdots<0;$$

可见 $k^*\in(60,75)$. 而 $\dfrac{60+75}{2}=67.5$，取 $k_2=68$ 得

$$f(k_2)=f(68)=0.62\cdots>0;$$

可见 $k^*\in(68,75)$. 而 $\dfrac{68+75}{2}=71.5$，取 $k_3=72$ 得

$$f(k_3)=f(72)=0.25\cdots>0;$$

可见 $k^*\in(72,75)$. 而 $\dfrac{72+75}{2}=73.5$，取 $k_4=74$ 得

$$f(k_4)=f(74)=0.0618\cdots>0;$$

可见 $k^*\in(74,75)$. 而 $\dfrac{74+75}{2}=74.5$，取 $k_5=74.5$ 得

$$f(k_5)=f(74.5)=0.013\cdots>0;$$

可见 $k^*\in(74.5,75)$. 而 $\dfrac{74.5+75}{2}=74.75$，取 $k_6=74.8$ 得

$$f(k_6)=f(74.8)=-0.015\cdots<0;$$

可见 $k^*\in(74.5,74.8)$. 而 $\dfrac{74.5+74.8}{2}=74.65$，取 $k_7=74.7$ 得

$$f(k_7)=f(74.7)=-0.006\cdots<0;$$

可见 $k^*\in(74.5,74.7)$. 而 $\dfrac{74.5+74.7}{2}=74.6$，取 $k_8=74.6$ 得

$$f(k_8)=f(74.6)=0.003\,6\cdots>0;$$

可见 $k^*\in(74.6,74.7)$.

至此，看来已经相当精确，暂将区间 $(74.6,74.7)$ 的中点作为解的近似值，即取 $k^*=74.65$.

第三步，将所得的解对照原问题的条件，看是否满足要求．在原问题中，$R=1$ m，当$\angle AOM=74.65°$时，有

$$OM=R\cos 74.65°=0.2647\ (\text{m}).$$

在上面的计算过程中，知道 k^* 的准确值在 74.6 到 74.7 之间．由于 $R\cos 74.6°=0.2656$ (m)，$R\cos 74.7°=0.2639$ (m)，可见我们的解答的实际误差上下都在 1 mm 之内．

上面的计算，可以用计算器，也可以用计算机进行．

如果所用的计算器和计算机软件有定义函数的功能，可以先定义函数 $f(k)$，以后的计算就方便了．

使用“超级画板”，在程序工作区可以定义函数，也可以进行计算．定义函数和计算的过程如下．其中第一行是我们定义的将度数 k 转换为计算机中常用的角度单位的转换函数 $d(k)$，第二行是 $f(k)$ 的定义．输入两行后按 Ctrl+Enter 键，则计算机回答$d(k)$和 $f(k)$，表明函数定义完成．下一行命令是说要进行浮点计算，以下就是函数值的计算了．

```
d(k){k * pi/180;}
f(k){pi+3 * sin (d(k)) * cos (d(k))-k * pi/60;}
≫d(k)
f(k) #
Float(1);
≫计算结果显示浮点数 #
f(60);
≫3 * sin ((π)/(3)) * cos ((π)/(3))=1.299 04 #
f(90);
≫(-π+6 * sin ((π)/(2)) * cos ((π)/(2)))/(2)=-1.5708 #
f(75);
≫(-π+12 * sin ((5 * π)/ * (12)) * cos ((5 * π)/(12)))/(4)=
-0.035 398 2 #
f(68);
```

≫(−2 * π+45 * sin ((17 * π)/(45)) * cos ((17 * π)/(45)))/(15)=

0.623 109 #

$f(72)$;

≫(−π+15 * sin ((2 * π)/(5)) * cos ((2 * π)/(5)))/(5)=

0.253 359 #

上面是半机械化的计算，也可以编个二分法的通用程序，让计算机自动完成全部计算过程.

下面的程序，可以在“Z+Z 超级画板”的程序工作区运行.

```
d(k){k * pi/180;}
f(k){pi+3 * sin (d(k)) * cos (d(k))−k * pi/60;}
Float(1);
root(a,b,h)
    {m=(a+b)/2;
      p=f(m);
      q=f(a);
      if(p==0){m;}
      else
      {if((b−a)<h){m;}
        else
          {if(p * q<0){root(a,m,h);}
            else{root(m,b,h);}
          }
      }
    }
```

程序的前两行定义了函数 $f(x)$，第三行说明是浮点计算. 下面一段是二分法通用程序，用函数 root（a，b，h）来表示. 输入的初始参数 a，b 是区间左右端点，要求 $a<b$，并且 $f(a)f(b)<0$. h 是误差界限. 例如，如输入 $h=0.1$，则最后结果和方程的解的差的绝对值小于 $\frac{h}{2}=0.05$.

将上述程序键入或拷贝到“Z+Z 超级画板”的程序工作区后，按 Ctrl+Enter 键，就定义了函数 $f(x)$ 和二分法程序 root（a，b，h）. 再键入“root (60，90，0.01);”，并按 Ctrl+Enter 键，计算机就自动用二分法求 $f(x)$ 的解，最后输出一个误差小于 $\frac{h}{2}$ 的近似值.

2.5 函数模型及其应用

2.5.1 几种函数增长快慢的比较

我们学过的函数，不少是递增函数.

递增函数的共同特点是，函数值 y 随着自变量 x 的增长而增长. 同为增长，但增长的快慢可能不同. 这好比赛跑，有冠军亚军，也有排不上名次的. 能不能开个函数的运动会，比一比谁跑得快呢?

赛跑有赛跑的规则. 一是要看在同一个时刻谁跑在前面，二是到最后跑到前面的才是胜利者.

函数赛跑，自变量好比是时间，函数值就像是跑的路程. 要比就比同样的自变量对应的函数值，让自变量充分大时定胜负.

赛跑的胜负，通常是观众和裁判看得出来的. 函数赛跑，我们可以在图上看.

例如，让 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=\frac{x}{4}$ 在 $[0,+\infty)$ 来比较，图形如下：

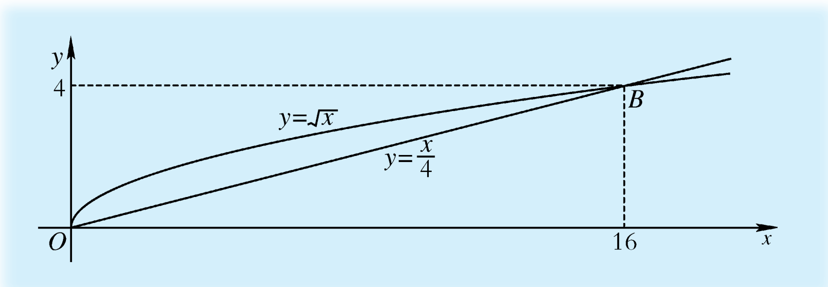


图 2-16

函数赛跑也有特殊之处：起跑线并不重要. 跑得快的就是快，让对手先跑一段没关系. 在这个例子中，把 $\frac{x}{4}$ 换成 $\frac{x}{4}-100$，还是 $\sqrt{x}$ 输.

想想为什么?

起跑后 $\sqrt{x}$ 一路领先，但它后劲不足，越跑越慢. 而 $\frac{x}{4}$ 却不紧不慢地匀速前进，终于在 $x=16$ 时追上了对手.

当 $x>16$ 时，$x^2>16x$，两边开方得 $x>4\sqrt{x}$，$\frac{x}{4}>\sqrt{x}$. 所以 $\sqrt{x}$ 绝对不可能东山再起反败为胜了.

开运动会常常要分组选拔，函数赛跑也可以先分组比一比. 我们考虑五类在 $(0,+\infty)$ 上递增的函数：

指数函数 $y=a^x(a>1)$ 算 A 组；幂函数 $y=x^\alpha(\alpha>1)$ 算 B 组；一次函数 $y=ax+b(a>0)$ 算 C 组；幂函数 $y=x^\alpha(0<\alpha<1)$ 算 D 组；对数函数 $y=\log_a x$ 算是最后一组，E 组.

同一组的比赛容易分出高低，看图便知分晓.

从图 2-17 看出，A 组内，a 越大跑得越快；E 组内，a 越小跑得越快.

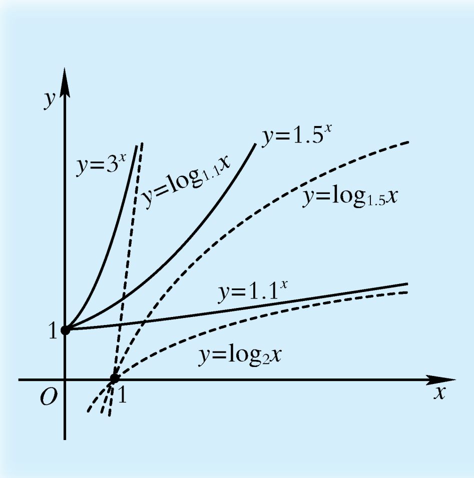


图 2-17

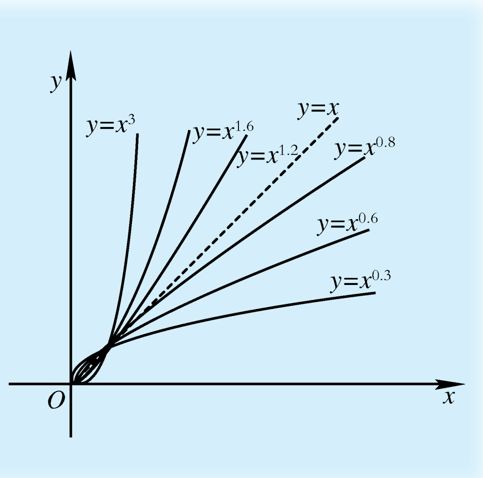


图 2-18

从图 2-18 看出，B 组和 D 组一起比赛，都是 α 越大跑得越快.

而且，不论正数 h 多么小，$x^{\alpha+h}$ 到后来会比 x^α 大得多. 因为比值 $\dfrac{x^{\alpha+h}}{x^\alpha}=x^h$，而当 x 很大时，x^h 要多大有多大. 所以，尽管 $x^{\alpha+h}$ 的幂指数比 x^α 只大一点点，前者的值会发展得比后者大很多很多倍.

现在来看 C 组，我们的老朋友——一次函数 $y=ax+b$.

我们知道，这类函数的特色是 y 随 x 的变化均匀变化.

如果两个一次函数的一次项系数相等，只有常数项不同，则两个函数的差是常数. 起跑时在前面的永远在前面，领先距离永远不变. 从图象上看，是两条平行直线.

如果两个一次函数的一次项系数不相等，系数大的跑得就快. 不管起跑时落后有多少，系数大的总能后来居上，而且将遥遥领先.

请你在方格纸上画出几个一次函数的图象来说明上面的事实. 例如，$y=2x$、$y=2x+3$ 和 $y=3x-3$.

小组选拔赛的情形一目了然. 组与组之间的比赛呢？

从图上看，$y=\log_{1.1}x$ 好像比 $y=1.1^x$ 跑得快.

其实不然.

图很大很大时，就能看见后者追上前者.

真正弄明白真相，要学更多的数学知识. 现在可以用计算器来探索.

请用计算器计算，将结果填入下列表格.

x	$\log_{1.1}x$	1.1^x
1	0	1.1
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		
160		
180		

上面已经对 B、D 两组作了比较.

用推理的方法，可以证明：B 组的任一个成员 $y=x^{\alpha}(\alpha>1)$，总比 C 组的任一个成员 $y=kx+c(k>0)$ 跑得快.

这是因为，$(k+1)x$ 比 $kx+c$ 快；而用对 B、D 两组作比较的方法，可知 $x^{\alpha}(\alpha>1)$ 又比 $(k+1)x$ 快.

类似地，C 组的函数，总比 D 组的增长快.

其实，可以把 B、C、D 三组合并，以幂指数排序分快慢. 剩下的问题，是 A 组和 B 组，D 组和 E 组的比赛. 当你学了更多的数学知识，就会知道：

A 组的任一个成员 a^{x} $(a>1)$，不管 $a-1$ 多么小，总比 B 组的任一个成员 x^{c} $(c>1)$ 快，哪怕 c 是 1 万或 1 亿.

D 组的任一个成员 $y=x^{\alpha}$ $(0<\alpha<1)$，不管 α 多么小，总比 E 组的任一个成员 $\log_{c}x$ $(c>1)$ 快.

我们已经用计算数据体现了前面一条，对于后一条，建议你设计一个表格，通过计算来检验.

比赛的结果，指数增长最快，对数增长最慢.

指数增长快，大家印象比较深；对数增长慢，一般不大注意.

一个城市的电话号码的位数，大致是城市人口以 10 为底的对数，上百万人口的城市，要发展到上千万，才需要把电话号码增加一位. 所以电话号码的升位是一个城市的大事，也说明对数函数值的增长多么艰难.

查英汉字典，从几万单词中查一个字，或从几十万单词中查一个字，用的工夫差不多，都要不了多久. 这是因为，由于合理编排，查字典的工作量是字数的对数函数，字数增长几倍，多查几秒而已.

在互联网上搜索资料，或在计算机上查找数据，能迅速地从海量数据中找到有关的网页或文件. 这也是因为，数据经过合理组织，搜索工作量是数据量的对数函数.

但要注意，这里讲的是自变量足够大的情形. 实际问题要具体分析：自变量变化范围有多大，能不能提供空间让指数函数表演一番？比如你在银行存上 100 元，设利息缴税后收益为 2%，每年自动转

存，n 年后连本带利是 $100(1+0.02)^n$ 元. 你这笔钱的增长是指数增长. 但是且慢高兴，算一算，要等多少年才能成为百万富翁?

函数快慢的比较，还可以看速度的变化，看它是越跑越快呢，还是越跑越慢.

计算速度的简单办法，是看单位时间内走过的路程.

也就是看看自变量加 1 时，函数值改变多少.

也就是看 $f(x+1)-f(x)$ 的大小.

下面，每组派一个代表来比较.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$2x+7$	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$\sqrt{x}$	1	1.414 2	1.732 1	2	2.236 1	2.449 5	2.645 8	2.828 4	3	3.162 3
$\log_2 x$	0	1	1.585 0	2	2.321 9	2.585 0	2.807 4	3	3.169 9	3.321 9
$2^{x+1}-2^x$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
$(x+1)^2-x^2$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$(2(x+1)+7)-(2x+7)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$	0.414 2	0.317 8	0.267 9	0.236 1	0.213 4	0.196 3	0.182 6	0.171 6	0.162 3	0.154 3
$\log_2(x+1)-\log_2 x$	1	0.585 0	0.415 0	0.321 9	0.263 0	0.222 4	0.192 6	0.169 9	0.152 0	0.137 5

观察上表的最后 5 行，说一说这 5 个函数增长速度的变化各有什么特点.

从表中最后两行，可以看出$\sqrt{x}$和 $\log_2 x$ 这两个函数的增长速度都随着 x 的增加而变小.

但是，这两个函数增长速度变化的快慢，还看不出明显的差别.

也许，多取些自变量的值进行计算，就能得到更多的信息.

练 习

为了节省时间和劳动，我们可以用“Z+Z 超级画板”的测量表达式的功能来

探讨.

> 学会使用测量表达式的功能，你能轻松地做更多的数学实验，探讨函数变化的规律.
>
> 例如，当 x 从 1 开始越变越大时，$\frac{1}{x}$ 和 e^{-x} 都会变小. 哪个变得快？

打开超级画板，执行菜单命令“测量｜测量表达式”，在打开的对话框里先后键入表达式(x+1)^(1/2)−x^(1/2)、log(2,x+1)−log(2, x)，每输入完一个表达式要用鼠标单击一下“确定”，然后再键入两个测量数值的比 m000/m001，单击一下“确定”，最后单击对话框的右上角关闭对话框. 这时，测量数据显示为 3 个文本框.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0.006\ 308\ 560$

$\log_2(x+1)-\log_2 x$

$=0.000\ 229\ 665$

$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\log_2(x+1)-\log_2 x}=27.468\ 5$

为了观察 x 变化时测量数据的变化，要插入变量 x. 执行菜单命令“插入｜变量对象”，在打开的对话框里键入字母 x，并将变化范围设置为 1～10，单击“确定”关闭对话框. 这时，屏幕上出现了变量 x 的变量尺. 同样步骤，再作出 x 变化范围从 10 到 10 000 的变量尺（如图 2-19）.

> 若用的是超级画板的免费版本，可在程序区键入命令“Variable(x,);”，即可生成变量尺 x.
>
> 超级画板默认保留 2 位小数，为了观察更仔细，可在屏幕右方的属性对话框修改“文本内容”“显示浮点数的精度”，使之保留更多的位数.

拖动变量尺上的滑钮改变 x 的值，观察测量数据的变化.

说一说，你发现了什么？

当 x 从 1 增加到 10 时，$\sqrt{x}$和 $\log_2 x$ 的增长速度之比是多少？

当 x 从 10 增加到 10 000 时，$\sqrt{x}$和 $\log_2 x$ 的增长速度之比是多少？

哪个增长得快？快多少倍？

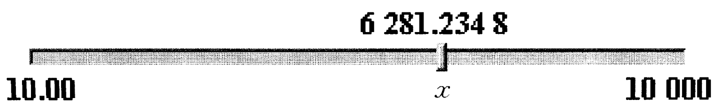


图 2-19

习题 10

学而时习之

1. 在同一坐标系内分别作出下列各组的图象.

（1）$y=2^x$ 和 $y=x^2$（$x\geqslant 0$）；　　（2）$y=x^3$（$x\geqslant 0$）和 $y=3x$（$x\geqslant 0$）；

(3) $y=\frac{1}{2}x$ 和 $y=\sqrt{x}$； (4) $y=\sqrt{x}$和 $y=\log_2 x$.

2. $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2$，两个函数的定义域都定为 $[0, +\infty)$，从上题的图象回答：

(1) 当 x 在什么范围内时，$f(x)<g(x)$？

(2) x 取哪些值时，$f(x)=g(x)$？

(3) 当 x 在什么范围内时，$f(x)>g(x)$？

温故而知新

3. 幂函数的增长快慢和幂指数的大小密切相关．但是，增长很快的幂函数和 A 组比较慢的指数函数相比，仍然是小巫见大巫.

请用计算器计算并填写下列表格，探索这个现象.

x	x^3	1.1^x
0		
1		
30		
50		
100		
150		
200		
250		
300		
350		

2.5.2 形形色色的函数模型

一、数据的函数模拟

例 某皮鞋厂，从今年 1 月份开始投产，并且前 4 个月的产量分别为 1 万双，1.2 万双，1.3 万双，1.37 万双. 由于产品质量好，款式新颖，前几个月的产品销售情况良好. 为了推销员在推销产品时，接受定单不至于过多或过少，需要估测以后几个月的产量. 厂里分析，产量的增加是由于工人生产熟练和理顺了生产流程. 厂里也暂时不准备增加设备和工人. 假如你是厂长，将会采用什么办法估算以后几个月的产量？

分析 作出图象如图 2－20，图上可以得到四个点：

$A(1,1)$， $B(2,1.2)$， $C(3,1.3)$， $D(4,1.37)$.

解法一 （一次函数模拟）

设模拟函数为 $y=ax+b$，以 B，C 两点的坐标代入函数式，有

$$\begin{cases}2a+b=1.2,\\3a+b=1.3.\end{cases}\quad 解之得\quad \begin{cases}a=0.1,\\b=1.\end{cases}$$

所以得

$$y=0.1x+1.$$

评价 此法的结论是：在不增加工人和设备的条件下，产量会每月上升 1 000 双，这是不太可能的.

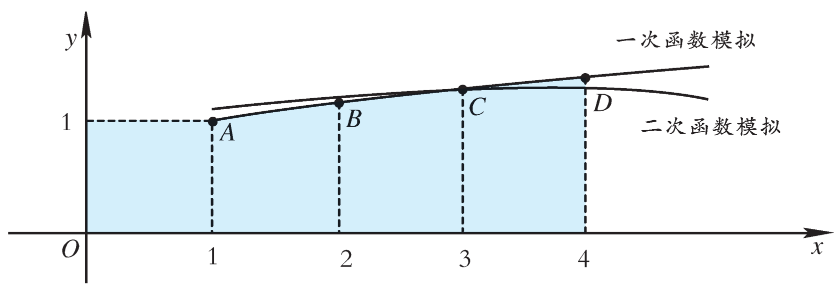


图 2-20

解法二 （二次函数模拟）

设 $y=ax^2+bx+c$，将 A，B，C 三点的坐标代入，有

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ 4a+2b+c=1.2, \\ 9a+3b+c=1.3. \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} a=-0.05, \\ b=0.35, \\ c=0.7. \end{cases}$$

所以 $\quad y=-0.05x^2+0.35x+0.7.$

评价 由此法计算 4 月份产量为 1.3 万双，比实际产量少 700 双，而且，由二次函数性质可知，产量自 4 月份开始将每月下降（图象张口向下，对称轴方程是 $x=3.5$），这显然不符合实际情况.

解法三 （幂函数模拟）

幂函数的一般形式是 $y=ax^{\alpha}+b$，此处为方便起见，取 $\alpha=\frac{1}{2}$，因此设 $y=a\sqrt{x}+b$，将 A，B 两点的坐标代入，有

$$\begin{cases} a+b=1, \\ \sqrt{2}a+b=1.2. \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} a=0.48, \\ b=0.52. \end{cases}$$

所以 $\quad y=0.48\sqrt{x}+0.52.$

评价 以 $x=3$ 和 4 代入，分别得到 $y=1.35$ 和 1.48，与实际产量差距较大. 这是因为此法只使用了两个月的数据.

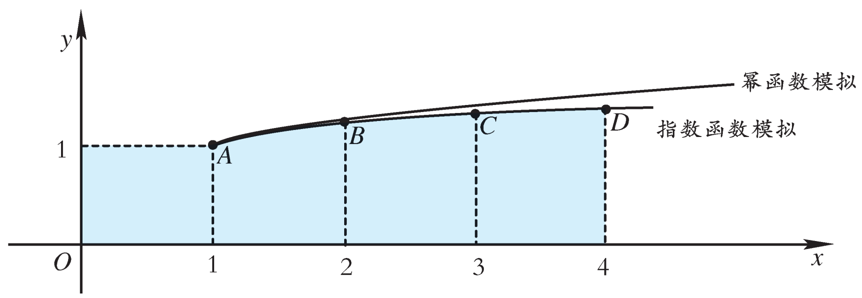


图 2-21

解法四 （指数函数模拟）

设 $y=ab^x+c$，将 A，B，C 三点的坐标代入，得

$$\begin{cases} ab+c=1, \\ ab^2+c=1.2, \\ ab^3+c=1.3. \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} a=-0.8, \\ b=0.5, \\ c=1.4. \end{cases}$$

所以 $\quad y=-0.8\cdot 0.5^x+1.4.$

评价 以 $x=4$ 代入得 $\quad y=-0.8\cdot 0.5^4+1.4=1.35.$

比较上述四个模拟函数的优劣，既要考虑到误差最小，又要考虑生产的实际问题，比如增产的趋势和可能性．经过筛选，以指数函数模拟为最佳：一是误差最小；二是由于是新建厂，随着工人技术、管理效益逐渐提高，一段时间内产量会明显上升，但过一段时间之后，如果不更新设备，产量必然趋于稳定，而指数函数模拟恰好反映了这种趋势．因此选用 $y=-0.8\cdot 0.5^{x}+1.4$ 模拟，比较接近客观实际．

二、什么叫作数学建模

把现实世界中的实际问题加以提炼，抽象为数学模型，求出模型的解，验证模型的合理性，并用该数学模型所提供的解答来解释现实问题，数学知识的这一应用过程称为数学建模．

对于现实中的实际模型，可适当作出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到一个数学结构．也可以说，数学建模是利用数学语言（符号、式子与图象）模拟现实的原型．把现实原型抽象、简化为某种数学结构是数学模型的基本特征．它或者能解释特定现象的现实状态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制方案．

上一节中所做的函数模拟，就是一个数学建模的过程．

数学建模的步骤通常是：

（1）正确理解并简化实际问题：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息．

根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设．

（2）建立数学模型：在（1）的基础上，利用适当的数学工具来刻画各变量之间的数学关系，建立相应的数学结构．

（3）求得数学问题的解．

（4）将数学模型分析计算的结果与实际情形进行比较，验证模型的准确性、合理性和适用性．

在互联网上输入关键词“数学建模”，可以查到许多有关数学建模的知识．

练　习

1. 一家庭（父亲、母亲和孩子们）去某地旅游，甲旅行社说："如果父亲买全票一张，其余人可享受半票优待."乙旅行社说："家庭旅行算集体票，按原价的 $\frac{2}{3}$ 优惠."这两家旅行社的原价是一样的. 试就家庭里不同的孩子数，分别计算两家旅行社的收费（建立表达式），并讨论哪家旅行社更优惠.
2. 有两位中学生在《中学生数学》杂志上发表了一篇合作论文，他们对"怎样烧开水最快最省煤气"这样一个非常实际的问题作了一次周到的考察，当关着煤气的时候，煤气旋钮（下称旋钮）的位置为竖直方向，他们把这个位置定为 0°，煤气开到最大时，位置为 90°，在 0°～90°中间分成 5 等份，代表不同的煤气流量，它们分别是 18°，36°，54°，72°，90°.

   在做了一系列的试验后，他们得到了下表的结果：

旋钮位置	烧开一壶水(3.75 L)所需时间	烧开一壶水所需煤气量(m^3)
18°	19	0.130
36°	16	0.122
54°	13	0.139
72°	12	0.149
90°	10	0.172

   请同学们在这两位同学已经做过的实验的基础上，对他们得到的数据做一番分析工作：

   (1) 能否找到最省时间同时又最省气的烧水方法？

   (2) 如果你急于用水，最省时间的烧水方法是怎样的？

   (3) 把旋钮位置作为自变量，烧开一壶水所需煤气量作为函数，请你在直角坐标系内作出相应的图象.

   (4) 从图象看，是不是旋钮开得越小越省气？请你对你的结论的实际意义作出解释.

   (5) 从表和图象中找出较为省气的旋钮位置.

习题 11

1. 家用电器（如电冰箱）使用的制冷剂氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层. 臭氧含量 Q 呈指数函数型变化，满足关系式

$$Q=Q_0 e^{-0.0025t},$$

其中 Q_0 是臭氧的初始量.

(1) 随着时间的增加，臭氧含量是增加还是减少？

(2) 多少年后，臭氧含量将只有现在的一半？

2. 下表是中国近年来人口数据（不包括香港、澳门特别行政区和台湾省）.

年 份	1996	1998	2000	2002
人口数（亿）	12.24	12.48	12.67	12.85

(1) 在直角坐标系内标出这四个点，再把这些点连接成线.

(2) 选择其中合适的两个点，建立一次函数模拟，从模拟函数预测 2004 年中国人口数.

(3) 能否用“更好”的直线 $y=ax+b$ 来模拟这组数据的变化？也就是说，能否确定 a，b 的值，使式子 $S=[y_1-(a+b)]^2+[y_2-(2a+b)]^2+[y_3-(3a+b)]^2+[y_4-(4a+b)]^2$ 为最小？

下面所使用的方法叫作最小二乘法：

A. 化简 S，使之成为字母 a 的二次三项式；

B. 当 a 取何值时（设为 a_0），二次三项式 S 有最小值（设为 S_0），这里 a_0 和 S_0 都应该是含字母 b 的式子，且 S_0 是字母 b 的二次三项式；

C. 求 b 的值 b_0，使 S_0 有最小值；

D. 求出对应于上述 b_0 的 a_0 值；

E. 用一次函数 $y=a_0x+b_0$ 模拟数据的变化，从模拟函数预测 2004 年中国人口数.

(4) 把所得到的两个预测数据和 2004 年中国实际人口数进行比较.

在本书第27页练习第1题中，我们给出了某县人口的10个数据.

有兴趣的同学可以自己编程，在计算机上用最小二乘法预测下一年该县的人口数.

小结与复习

一、指导思想

为什么要把幂运算从整数指数幂推广到分数指数幂和实数指数幂?

因为整数指数幂不够用，不能描述世界上的许多重要现象，不能处理重要的数学问题，不能适应数学理论发展的需要.

有了幂运算 $A=B^C$，在 A，B，C 三个数中，取一个为保持不变的参数，另外两个数之间就有了确定的对应关系. 其中一个作为自变量 x，另一个就是 x 的函数. 这样得到的函数中，有三类是数学里最基本最重要的函数，即指数函数、对数函数和幂函数. 因为:

第一，大量的自然现象、社会现象可以用这些函数作为数学模型来描述和解释，大量的实际问题可以用这些函数为工具来解决.

第二，这些函数和数学里的基本运算加法和乘法有密切的联系，是沟通加减和乘除的桥梁.

第三，大量其他的重要函数可以用这些函数来表示.

世界的千姿百态，可以归结为数量的变化. 数量变化趋势的基本类型不外两大类，一类表现为单调的增减，一类表现为往复的摆动. 指数函数、对数函数和幂函数，能描述不同程度快慢的增长和衰减的现象，顶起了现实世界的函数模型的半边天.

学习数学，切忌死记硬背，机械推演，贵在联系贯通，举一反三. 数学概念要联系生活实际，数学方法要解决实际问题. 数学本身的各部分内容，更有密切的联系. “非 0 实数的 0 次幂为 1”，当 $F(x)$是指数函数时表述为 $F(0)=1$，当 $F(x)$是对数函数时表述为 $F(1)=0$；“1 的任意次幂为 1”，对于指数函数、对数函数表现为

底不为 1，对于幂函数 $F(x)$ 表现为 $F(1)=1$，在图上又表现为曲线经过点（1，1）．这三类函数都有单调性，但归根结底无非是两点，就是“大于 1 的正数，正指数幂大于 1；小于 1 的正数，正指数幂小于 1”．因为大于 1 的正数的倒数小于 1，两点又可归结为一点．一件事有几种说法，说来说去是一回事．一个城市的电话号码增 1 位，人口增长 10 倍，说明指数增长快；人口增长 10 倍，电话号码才增 1 位，说明对数增长慢．看清楚这一点，学数学就能举一反三，就有了味道，就记得住，就用得活．100 多页的数学课本，这样想来想去，就只有十几页，两三页，甚至只有几行了．但这几行又能千变万化，解决大量的实际问题．

二、内容提要

1．指数和对数．

（1）分数指数的定义：

$$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}\quad (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N},\ m\geqslant 2),$$

$$a^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}\quad (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N},\ m\geqslant 2).$$

（2）如同减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算一样，对数运算是指数运算的逆运算．

$$a^b=N\Leftrightarrow \log_a N=b\quad (a>0,\ a\neq 1,\ N>0).$$

由此可得到对数恒等式：

$$a^{\log_a N}=N.$$

（3）对数换底公式 $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$（$a>0$，$b>0$，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$N>0$）的意义在于把各个不同底数的对数换成相同底数的对数，这样，一可以进行换算，二可以通过对数表求值．

（4）指数和对数的运算法则有：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad \log_a M+\log_a N=\log_a(MN),$$

$$(a^m)^n=a^{mn},\qquad \log_a M^n=n\log_a M,$$

$$(ab)^n=a^n\cdot b^n.\qquad \log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}.$$

$(a, b\in \mathbf{R}_+, m, n\in \mathbf{R})$ $(M, N\in \mathbf{R}_+, a>0, a\neq 1)$.

2. 指数函数、对数函数和幂函数.

(1) 要熟记这三个函数在不同条件下的图象，并能熟练地由图象“读”出该函数的主要性质.

(2) 同底数的指数函数和对数函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形. 由图可“读”出指数函数和对数函数的主要性质：

指数函数	对数函数
(1) 定义域：$\mathbf{R}$	(1) 定义域：$\mathbf{R}_+$
(2) 值域：$\mathbf{R}_+$	(2) 值域：$\mathbf{R}$
(3) 过点 (0，1)	(3) 过点 (1，0)
(4) $a>1$ 时为增函数， $0<a<1$ 时为减函数.	(4) $a>1$ 时为增函数， $0<a<1$ 时为减函数.

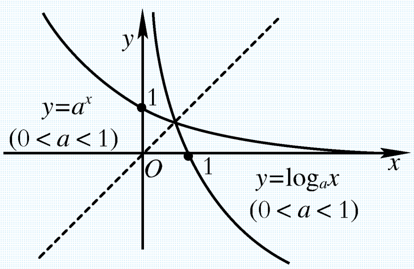


图 2-22

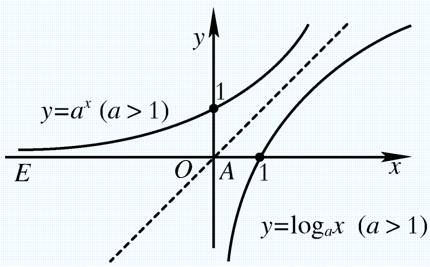


图 2-23

如果两个函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 描述的是同一个对应关系，则称这两个函数互为反函数. 这时两者之间满足关系 $g(f(x))=x$ 和 $f(g(y))=y$，并且它们的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称. 函数 f 叫作 g 的反函数，g 也叫作 f 的反函数. f 的定义域是 g 的值域，f 的值域是 g 的定义域，两者同为递增或递减.

由上面反函数的定义，我们知道，指数函数 $y=a^x$ 和同底数的对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数. 这给研究对数函数的图象和性质带来了方便.

(3) 幂函数 $y=x^\alpha$ 在第一象限（含边界）的图象由幂指数的不同取值可分为三种走势.

由图 2－24，当 $\alpha>0$ 时幂函数的主要性质是：

1° 恒过(0，0)，(1，1)两点；

2° 在区间 $[0，+\infty)$ 上为增函数.

当 $\alpha<0$ 时幂函数的主要性质有：

1° 恒过点(1，1)；

2° 在区间$(0,+\infty)$上为减函数；

3° 图象走向和 x 轴、y 轴正向无限接近.

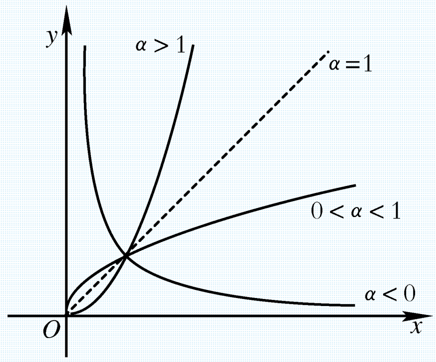


图 2-24

3. 函数与方程.

(1) 实系数一元二次方程当 $\Delta>0$ 时有两个不等实根；当 $\Delta=0$ 时有两个相等实根；当 $\Delta<0$ 时无实数根.

(2) 方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$的图象和 x 轴交点的横坐标，也叫作函数的零点；方程 $f(x)=g(x)$的解也就是两个函数 $y=f(x)$和 $y=g(x)$图象交点的横坐标.

(3) 可以用二分法或其他近似方法求得函数零点的近似值.

4. 函数模型及其应用.

(1) 目前我们能建立的函数模型主要是一次函数，二次函数，幂函数，指数函数和对数函数的模型.

(2) 建模的目的是：模拟实际问题和用模拟函数的性质去推测、判断未进行测量或不便测量的数据，特别是预测实际问题的未来走势.

(3) 建模的大致步骤是：了解和简化实际问题，建立实际问题的数学模型，分析所得数学模型，把模型所判断的结论和实际模型的表现加以比较，改进数学模型.

三、学习要求和要注意的问题

1. 关于函数概念与基本初等函数的学习要求.

(1) 函数（续第一章的小结）.

1° 通过已学过的函数特别是二次函数，理解函数的单调性，最大(小)值及其几何意义；结合具体函数，了解奇偶性的含义.

2° 学会运用函数图象理解和研究函数的性质.

(2) 指数函数.

1° 通过具体实例（如细胞分裂，考古中所用的^{14}C的衰减，药物在人体内残留量的变化等)，了解指数函数模型的实际背景.

2° 理解有理指数幂的含义，通过具体实例了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算.

3° 理解指数函数的概念和意义，能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特点.

4° 在解决简单实际问题的过程中，体会指数函数是一类重要的函数模型.

(3) 对数函数.

1° 理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；通过阅读材料，了解对数的发现史以及对简化运算的作用.

2° 通过具体实例，直观了解对数函数模型所刻画的数量关系，初步理解对数函数的概念，体会对数函数是一类重要的函数模型；能借助计算器或计算机画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与特点.

3° 知道指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数 $(a>0,\ a\neq 1)$.

(4) 幂函数.

通过实例，了解幂函数的概念. 结合函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象，了解它们的变化情况.

2. 关于反函数的学习要求.

要求知道一些具体函数的反函数，例如，知道指数函数 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数；知道互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 轴对称；知道互为反函数的两个函数中一个的定义域是另一个的值域，一个递增(递减)则另一个也递增(递减).

3. 关于函数与方程的学习要求.

（1）结合二次函数的图象，判断一元二次方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根的联系.

（2）根据具体函数的图象，能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解，了解这种方法是求方程近似解的常用方法.

4. 关于函数模型及其应用的学习要求.

（1）利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数增长差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.

（2）收集一些社会生活中普遍使用的函数模型（指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等）的实例，了解函数模型的广泛应用.

5. 学习中要注意的问题.

（1）在指数和对数的运算中要特别注意运算公式成立的条件，不注意这一点，就会出现一些明显的错误.

（2）在函数学习中，要学会从图象“读出”函数的性质. 基本初等函数只有几个，许多函数的图象要通过这几个基本初等函数的图象变化得到，如果我们能够在看到图象后熟练地“读”出相应函数的性质，那么我们的知识范围就可以扩大很多.

（3）对指数函数和对数函数的讨论要特别注意它们的底数的范围，底数在区间$(0, 1)$上和在区间$(1, +\infty)$上变化时函数的图象走向不同，因而性质也有明显的差异.

（4）在考虑一元二次方程解的分布时，必须牢记只有在存在实数解的条件下，讨论解的分布才是有意义的.

（5）同学们现在还只是学了函数的初步知识，千万不要以为有了这些就可以圆满地解决实际问题了. 实际存在的问题是复杂多变的，真正要用数学知识去解决实际存在的问题，需要同学们努力学习更多的各方面的知识.

（6）用函数模拟实际问题，需要对已知的数据进行处理，而判断模拟函数的优劣，不仅要看它是否能基本符合已知数据，还要看它是否与问题的未来趋势基本吻合.

四、参考例题

例 1 图 2-25 中，画出了四个幂函数 $y=x^{\alpha}$，$\alpha=\frac{2}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$在区间$[0,+\infty)$上的图象，请把区间$(0,1)$上的四段曲线自上而下地标出它们相应的 α 值.

分析 由前面的讨论可知，在区间$(0,1)$上，$y=x$ 上方的两条曲线有 $0<\alpha<1$，而 $y=x$ 下方的两条曲线有 $\alpha>1$.

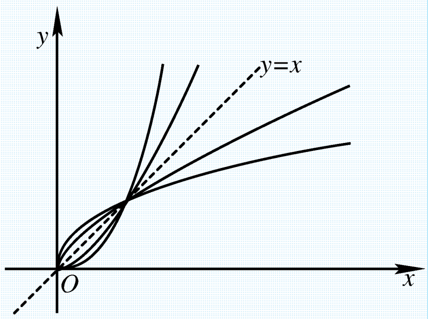


图 2-25

解 这四个函数当自变量 $x=\frac{1}{2}$时相应的函数值的大小比较，根据指数函数的单调性，由$\frac{2}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}<\frac{5}{2}$可得：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

由此，在区间$(0,1)$内从上到下的四条曲线相应的 α 值是：$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$.

例 2 实数 m 在什么范围内变化时，方程 $2^{-|x-1|}=m$ 有实数解？

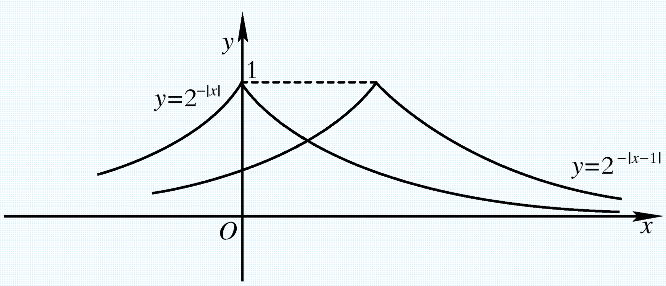


图 2-26

分析 也就是函数 $y=2^{-|x-1|}$ 和 $y=m$ 的图象当 m 在什么范围内变化时有公共点.

可按以下次序作图：

$$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x},\ y=2^{-|x|},\ y=2^{-|x-1|}.$$

如图 2-26，得 $0<m\leqslant 1$.

复 习 题 二

学而时习之

1. 如图2-27，函数 $y=a^x$（$0<a<1$）的图象是____.

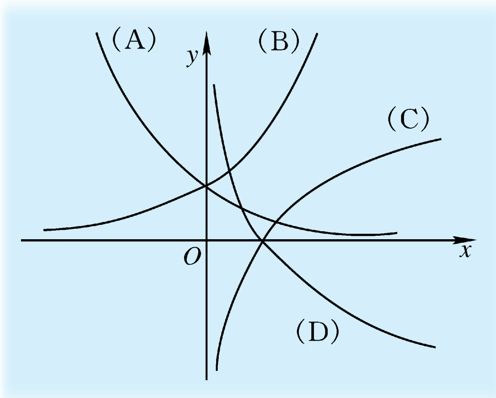


图 2-27

2. 与函数 $y=x$ 有相同的图象的函数是（　　）

(A) $y=\sqrt{x^2}$

(B) $y=\dfrac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

(D) $y=\log_a a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

3. 方程 $2^{\log_3 x}=\dfrac{1}{4}$的解是（　　）

(A) $x=\dfrac{1}{9}$　　(B) $x=\dfrac{\sqrt{x}}{3}$

(C) $x=\sqrt{3}$　　(D) $x=9$

4. $\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}$的值是（　　）

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) 1

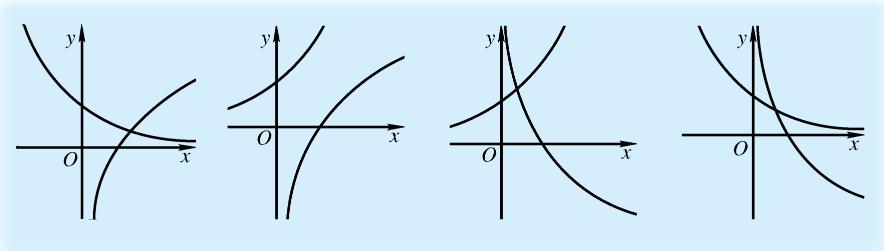
(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) 2

5. 设 a，b，c 都是正数，且 $3^a=4^b=6^c$，那么（　　）

(A) $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$

(C) $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$　　(D) $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

6. 如图 2-28，当 $a>1$ 时，在同一坐标系内 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是（　　）



(A)　(B)　(C)　(D)

图 2-28

7. 函数 $y=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在什么区间上是增函数？

8. 函数 $y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象（　　）

(A) 关于 y 轴对称　　(B) 关于原点对称

(C) 关于直线 $x+y=0$ 对称　　(D) 关于直线 $x-y=0$ 对称

9. 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$ 且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)$等于（　　）

(A) -26　　(B) -18

(C) -10　　(D) 10

10. 如果奇函数 $f(x)$在区间[3，7]上是增函数且最小值为 5，那么$f(x)$在区间[−7，−3] 上是（　　）

(A) 增函数且最小值为−5　　(B) 增函数且最大值为−5

(C) 减函数且最小值为−5　　(D) 减函数且最大值为−5

11. 定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数 $g(x)$和一个偶函数 $h(x)$的和. 如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，那么（　　）

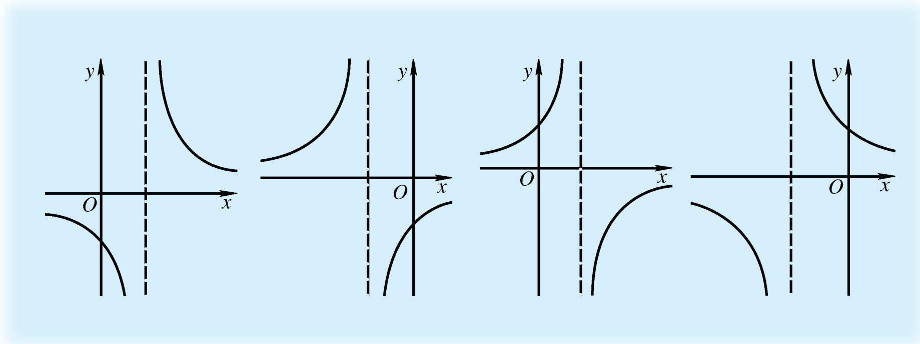
(A) $g(x)=x$，$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$，$h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C) $g(x)=\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D) $g(x)=-\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

12. 如图 2-29，函数 $y=\frac{1}{x+1}$的图象是（　　）



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

图 2-29

13. 如图 2-29，函数 $y=-\dfrac{1}{x+1}$的图象是（　　）

温故而知新

14. 设函数 $y=f(x)$定义在实数集上，则函数 $y=f(x-1)$与 $y=f(1-x)$的图象关于（　　）

（A）直线 $y=0$ 对称　　（B）直线 $x=0$ 对称

（C）直线 $y=1$ 对称　　（D）直线 $x=1$ 对称

15. 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数，偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$的图象与 $f(x)$的图象重合. 设 $a>b>0$，给出下列不等式：

(1) $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$

(2) $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$

(3) $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$

(4) $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$

其中成立的是（　　）

（A）(1) 与 (4)　　（B）(2) 与 (3)

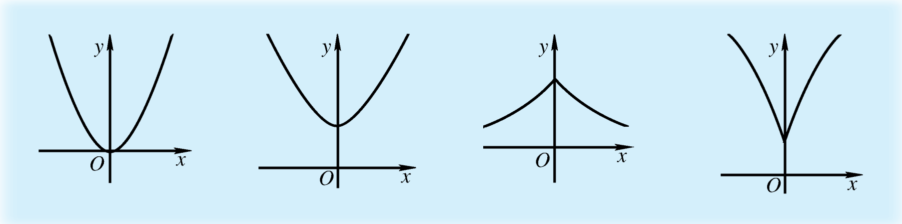
（C）(1) 与 (3)　　（D）(2) 与 (4)

16. 已知 $0<x<y<a<1$，则有（　　）

（A）$\log_a(xy)<0$　　（B）$0<\log_a(xy)<1$

（C）$1<\log_a(xy)<2$　　（D）$\log_a(xy)>2$

17. 如图 2-30，函数 $y=a^{|x|}$ $(a>1)$ 的图象是（　　）



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

图 2-30

18. 函数 $y=a^x$ 在[0，1]上的最大值与最小值的和为 3，则 $a=$(　　)

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）2　　（C）4　　（D）$\frac{1}{4}$

19. 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A，B 两点，分别过点 A，B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C，D 两点.

（1）证明点 C，D 和原点 O 在同一条直线上；

（2）当 BC 平行于 x 轴时，求点 A 的坐标.

20. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 等于（　　）

（A）0.5　　（B）-0.5　　（C）1.5　　（D）-1.5

21. 在区间（$-\infty$，0）上为增函数的是（　　）

（A）$y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　（B）$y=\frac{x}{1-x}$

（C）$y=-(x+1)^2$　　（D）$y=1+x^2$

22. $F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)\cdot f(x),(x\neq 0)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 不恒等于 0，则 $f(x)$ （　　）

（A）是奇函数

（B）是偶函数

（C）可能是奇函数，也可能是偶函数

（D）不是奇函数，也不是偶函数

23. 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 [0，1] 上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是（　　）

（A）（0，1）　　（B）（1，2）

（C）（0，2）　　（D）[2，$+\infty$）

24. 已知 $y=\log_a(2-x)$ 是 x 的增函数，则 a 的取值范围是（　　）

（A）（0，2）　　（B）（0，1）

（C）（1，2）　　（D）（2，$+\infty$）

25. 已知 $f(x)=8+2x-x^2$，如果 $g(x)=f(2-x^2)$，那么 $g(x)$（　　）

(A) 在区间$(-1, 0)$上是减函数　　(B) 在区间$(0, 1)$上是减函数

(C) 在区间$(-2, 0)$上是增函数　　(D) 在区间$(0, 2)$上是增函数

26. 求函数 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的值域.

27. 将 $y=2^x$ 的图象（　　）

(A) 先向左平行移动 1 个单位　　(B) 先向右平行移动 1 个单位

(C) 先向上平行移动 1 个单位　　(D) 先向下平行移动 1 个单位

再作关于直线 $y=x$ 对称的图象，可得到函数 $y=\log_2(x+1)$的图象.

28. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq0)$ 的反函数是（　　）

(A) $y=x$ $(x\neq0)$　　(B) $y=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq0)$

(C) $y=-x$ $(x\neq0)$　　(D) $y=-\dfrac{1}{x}$ $(x\neq0)$

29. 若函数 $y=f(x)$和 $y=g(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称，$f(a)=b$，$ab\neq0$，则 $g(b)$等于（　　）

(A) a　　(B) $\dfrac{1}{a}$

(C) b　　(D) $\dfrac{1}{b}$

30. 若定义在区间$(-1, 0)$内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足 $f(x)>0$，则 a 的取值范围是（　　）

(A) $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$　　(B) $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$

(C) $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$　　(D) $(0, +\infty)$

31. 设 $f(x)$，$g(x)$都是单调函数，有如下四个命题：

(1) 若 $f(x)$单调递增，$g(x)$单调递增，则 $f(x)-g(x)$单调递增；

(2) 若 $f(x)$单调递增，$g(x)$单调递减，则 $f(x)-g(x)$单调递增；

(3) 若 $f(x)$单调递减，$g(x)$单调递增，则 $f(x)-g(x)$单调递减；

(4) 若 $f(x)$单调递减，$g(x)$单调递减，则 $f(x)-g(x)$单调递增.

其中，正确的命题是（　　）

(A) (1) (3)　　(B) (1) (4)　　(C) (2) (3)　　(D) (2) (4)

32. 给定实数 a $(a\neq0$ 且 $a\neq1)$，设函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\dfrac{1}{a}\right)$. 证明：

(1) 经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴；

(2) 这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

33. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$.

(1) 证明：当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数；

(2) 求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

34. 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|-1$，$x\in\mathbf{R}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

上下而求索

指数函数表的几何性质

一个矩形，沿水平方向等分为 20 条，沿垂直方向等分为 50 条，分成了 1 000 格.

在每个格子里填上一个确定的 4 位数，如附表所示．填数的方法和指数函数 $E(x)=10^x$ 有密切关系.

将 1 000 个格子自左而右，自上而下排成顺序．左上角是第一格，填入 $E(3)=1\ 000$，第 2 格填入 $E(3.001)$ 的四位有效数字 1 002，第 3 格填入 $E(3.002)$ 的四位有效数字 1 005．这样每次让自变量 x 增加 0.001，第一行最后一格是 $E(3.019)$ 的四位有效数字 1 045，第 2 行第一格是 $E(3.020)$ 的四位有效数字1 047.

这实际上是指数函数 $E(x)=10^x$ 在区间 $[3,4]$ 上的函数表．因为指数函数是对数函数的反函数，所以也叫反对数表.

如附表，在右上、右下和左下三个角又各添上 1 格，一共是 1 003 个格子，添加的 3 格都填上 1 000.

一个格子的四角各有一点．把左下角的点和格子中的数对应起来．这样，1 003个点每点都对应一个数．设这 1 003 个点组成集合 S．若 $A\in S$，把 A 所对应的数记作 $P(A)$.

这样把数和点对应起来，有趣的现象出现了：

(a) 若 S 中的 A，B，C，D 四个点构成平行四边形，则 $\dfrac{P(A)}{P(B)}$ 和 $\dfrac{P(C)}{P(D)}$ 的有效数字近似相等.

用点所在的行列号记它，行号从 0 到 49，列号从 0 到 19. 例如，设 A 是左上角的点，则记 $A=(0, 0)$；B 在 9 行 13 列，记 $B=(9, 13)$，这时 $P(B)=1\ 560$. 再取 $C=(24, 3)$，$P(C)=3\ 041$；$D=(33, 16)$，$P(D)=4\ 742$. 则有

$$\frac{P(B)}{P(A)}=1.560,\quad \frac{P(D)}{P(C)}=1.559\ 4.$$

两者相差不超过 0.001.

(b) 若 S 中的 A，B，C 三点中，B 是 AC 上的点，则 $P(B)$ 和 $\sqrt{P(A)\cdot P(C)}$ 的有效数字近似相等.

请自己检验这条性质.

在上述准备基础上，探索下列问题：

(1) 请用学过的知识解释上述现象.

(2) 进一步观察试验，能不能发现此表的更多性质？

(3) 试利用此表，或配合其他工具如直尺、透明卡片，设计一个计算乘、除、比例和开方的近似计算工具.

(4) 探讨其他函数表有没有类似的有助于某些计算的性质.

上面 (2)、(3)、(4) 可以在教师指导下，阅读相关的资料来完成.

附表

整体反对数表

1	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1000
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	
01	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	
02	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	
03	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	
04	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	
05	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	
06	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	
07	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	
08	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	
09	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	
10	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	
11	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	
12	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	
13	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	
14	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	
15	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	
16	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	
17	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	
18	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	
19	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	
20	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	
21	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	
22	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	
23	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	
24	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	
25	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	
26	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	
27	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	
28	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	
29	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	
30	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	
31	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	
32	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	
33	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	
34	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	
35	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	
36	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	
37	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	
38	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	
39	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	
40	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	
41	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	
42	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	
43	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	
44	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	
45	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	
46	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	
47	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	
48	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	
49	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	1000
50	1000																				

数学文化

函数概念小史

在整个数学当中，一个首要的概念是函数．意大利科学家**伽利略**(Galileo，1564—1642)研究运动学，法国数学家笛卡儿研究动点轨迹，伽利略和笛卡儿的工作中蕴含了函数的精髓．伽利略指出："从静止开始的匀加速度下降的物体，其经过的距离与所用时间的平方成正比．"即可写成 $s=kt^2$，其中 t 是时间，s 是自由落体的下落距离．伽利略的这些话清楚地表明他是在讨论变量与函数，只差字面上的概括和函数符号的引入这一步了．17 世纪上半叶，笛卡儿指出，当动点做曲线运动时（曲线是动点的轨迹），动点的 x 坐标与 y 坐标相互依赖并同时发生变化，其关系可由包含 x 与 y 的方程式给出．他的这些观点暗含了函数的思想．

函数作为数学术语是德国数学家**莱布尼兹**(Leibniz，1646—1716)首先采用的．他于 1692 年第一次提出函数概念的明确定义和函数这个词，莱布尼兹用 $1x$ 与 $2x$ 表示以 x 为自变量的两个不同的函数，他首先研究的是幂函数．

新思想常常不是单独产生的．1718 年，瑞士数学家**约翰·伯努利**(Johann Bernoulli，1667—1748)定义："一个变量的函数是指由这个变量和常量以任意一种方式组成的一种量．"1748 年，约翰·伯努利的学生，数学家**欧拉**定义："一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析表达式．"师生两人关于函数的定义如出一辙．

1797 年，法国数学家**拉格朗日**（Lagrange，1736—1813）重述了上面约翰与欧拉的定义，但他指出："我们用字母 f 或 F 放在一个变量前面以表示该变量的一个函数，即表示依赖于这个量的另

一个量，它按一种给定的规律随那个变量一起变化.”其他数学家也纷纷给出大同小异的关于函数的定义. 18 世纪的数学家们都认为一个函数必须处处有相同的解析表达式，例如函数 $y=x^2+2x+1$，$y=e^x$ 等等，即使像**高斯**(Gauss，1777—1855)那样天才的数学家也认为函数是一个封闭的(解析的)表达式.

法国数学家**傅立叶**(Fourier，1875—1941)和**柯西**(Cauchy，1789—1857)则主张，函数未必一定要有一个解析表达式. 傅立叶指出：“如果对于给定区间上的每一个 x 值有唯一的一个 y 值同它对应，那么 y 就是 x 的一个函数，至于在整个区间上 y 是否可以用数学运算来求得，那是无关紧要的事.”德国著名数学家**狄利克雷**(Dirichlet，1805—1859)给出一个数学史上著名的函数实例.

$$D(x)=\begin{cases}1(x\text{ 是有理数}),\\0(x\text{ 是无理数}).\end{cases}$$

狄利克雷函数 $D(x)$ 具体而深刻地显示了函数是数集到数集的映射这个现代函数观点.

到现代，函数的应用已经渗透到数学、自然科学乃至人文科学的各个领域中了.

1960 年，美国地质考古学家 W. Libby 用指数函数模型研究出古代白令海峡的水面比现在窄得多，是北极冰山的融化使白令海峡逐渐变宽的. 他从阿拉斯加的洞穴中发现了古人类穿过的草鞋，实验测出那只草鞋的放射性碳是现在还活着的同种草的放射性碳含量的 $\frac{1}{4}$，而放射性碳的半衰期(即放射性减半的耗时)是 5 600 年，所以那只鞋是 $5\,600\times2=11\,200$ 年前编织的. 1967 年，卡内基-梅隆大学的科学家利用 W. Libby 的指数函数衰变原理鉴定出有人贩卖荷兰大画家 Jan Vermeer 油画的赝品.

指数函数还可以近似地预报人口，在社会科学中有重要应用.

在计算机程序语言中，函数概念有很大的拓广并得到充分的应用. 特别是在某些人工智能语言中，几乎所有的操作都用函数来表示.

由于物理学的推动和数学理论发展的需要，数学中函数概念也有了新的发展，出现了测度函数、广义函数等新的研究分支．大量的重要数学问题和实际问题，归结到特定函数的计算．函数是纯数学与应用数学的灵魂．

附　录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英　文　名	页　码
集合	set	2
元素	element	2
属于	belong to	2
整数集	set of integer	3
有理数集	set of rational number	3
实数集	set of real number	3
自然数集	set of natural number	3
有限集	finite set	3
无限集	infinite set	3
空集	empty set	3
区间	interval	4
开区间	open interval	4
闭区间	closed interval	4
包含于	lie in	7
包含	contain	7
子集	subset	7
全集	universe set	8
补集	complementary set	8
交集	intersection	10
并集	union	11
充分条件	sufficient condition	12
必要条件	necessary condition	12
充要条件	sufficient and necessary condition	12
映射	map 或 mapping	16

象	image	16
原象	inverse image	16
自变量	argument	18
定义域	domain	18
值域	co-domain	19
函数	function	19
奇函数	odd function	33
偶函数	even function	34
上界	upper bound	38
下界	lower bound	39
有界函数	bounded function	39
无界函数	unbounded function	39
最大值	maximum	39
最小值	minimum	39
递增函数	increasing function	39
递减函数	decreasing function	39
严格单调	strictly monotone	39
差分	difference	39
n 次方根	nth root	78
根式	radical	78
根指数	radical exponent	78
被开方数	radicand	79
指数函数	exponential function	84
对数	logarithm	90
底	base	90
真数	proper number	90
常用对数	common logarithm	94
自然对数	natural logarithm	94
反函数	inverse function	104
对数函数	logarithmic function	104
幂函数	power function	108